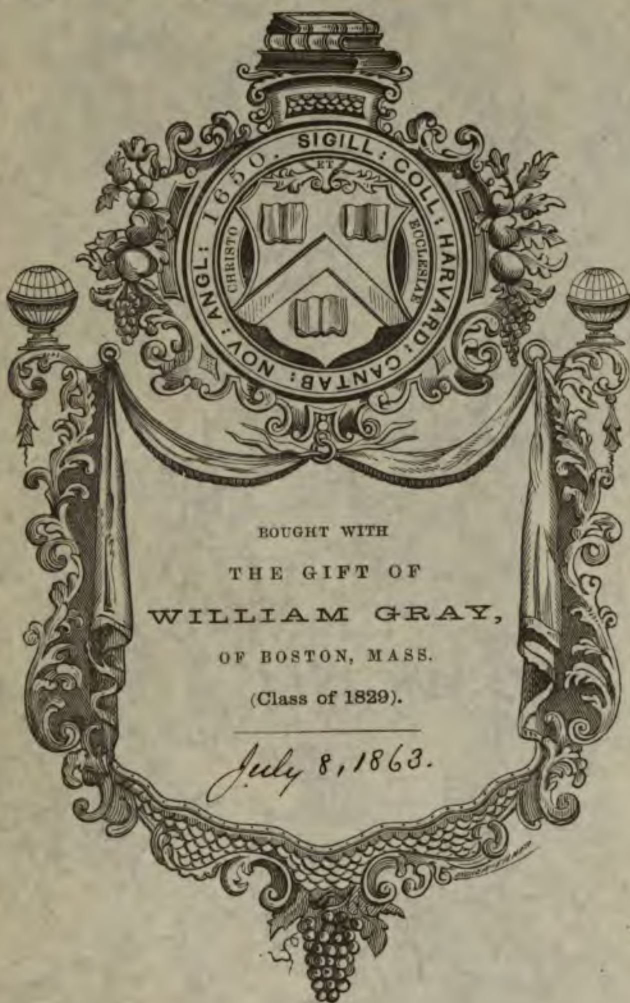
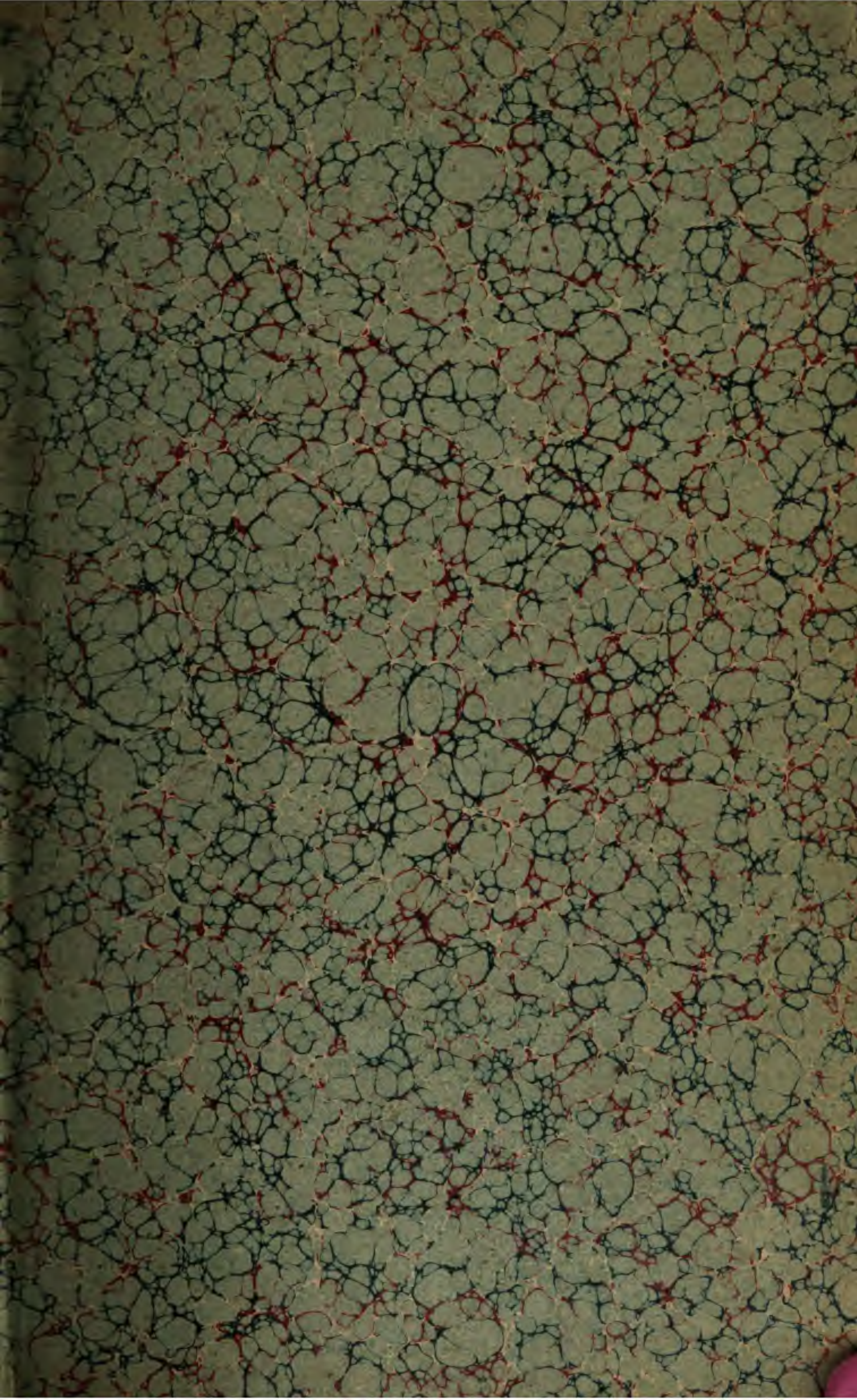

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



LEÇONS
D'ALGÈBRE.

Paris. — Imprimé par E Thunot et Ce, rue Racine, 26.

LEÇONS

D'ALGÈBRE

CONFORMES

AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE L'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES,

PAR CHARLES BRIOT,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS.



DEUXIÈME PARTIE,

à l'usage des élèves

DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ET DES CANDIDATS A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



QUATRIÈME ÉDITION.



PARIS.

DUNOD, ÉDITEUR,

Successeur de Carilian-Gœury et Vor Dalmont,

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

49, Quai des Augustins, 49.

1862

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

COMPLÉMENT DE CALCUL ALGÉBRIQUE.

LIVRE II.

BINÔME.

LIVRE III.

SÉRIES.

LIVRE IV.

DES LOGARITHMES.

LIVRE V.

DÉRIVÉES.

LIVRE VI.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

LIVRE VII.

DES DIFFÉRENCES.

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE.

LEÇONS D'ALGÈBRE.

DEUXIÈME PARTIE.

LIVRE PREMIER.

COMPLÉMENT DE CALCUL ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DES NOMBRES INCOMMENSURABLES.

Définition.

1. Lorsqu'on veut mesurer une grandeur, on cherche une commune mesure entre cette grandeur et l'unité. Si, par exemple, la commune mesure est contenue 7 fois dans l'unité et 4 fois dans la grandeur que l'on veut mesurer, cette grandeur, étant égale à 4 fois la septième partie de l'unité, sera représentée par la fraction $\frac{4}{7}$.

Mais il peut arriver que la grandeur et l'unité n'admettent pas de commune mesure, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de grandeur, si petite qu'elle soit, contenue exac-

tement dans la grandeur et l'unité. Dans ce cas, on dit que la grandeur est *incommensurable*, et, comme il est impossible de la mesurer exactement, on se borne à une évaluation approximative. Imaginons l'unité partagée en un grand nombre de parties égales, par exemple en mille parties égales, et cherchons combien la grandeur à mesurer contient de ces parties; elle en contient, je suppose, 728, plus un reste plus petit que l'une des parties; la grandeur à mesurer, étant plus grande que $\frac{728}{1000}$, mais plus petite que $\frac{729}{1000}$, sera représentée par l'une ou l'autre de ces deux fractions, avec une erreur moindre que 1 millième.

Si l'on avait partagé l'unité en un million de parties égales, on aurait obtenu la mesure de la grandeur avec une erreur moindre que 1 millionième.

Le nombre fractionnaire qui mesure une grandeur incommensurable, avec une approximation aussi grande qu'on veut, s'appelle un ***nombre incommensurable.***

2. Les racines des quantités qui ne sont pas puissances parfaites, donnent aussi naissance à des nombres incommensurables. Appelons A un nombre entier non puissance n^e parfaite, et plus généralement une fraction ordinaire irréductible dont les termes ne sont pas des puissances n^{es} parfaites; je dis qu'il n'existe pas de nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ qui, élevé à la n^e puissance, reproduise exactement A. En effet, la n^e puissance de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^n}{b^n}$; comme on peut supposer la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible, c'est-à-dire les deux nombres a et b premiers entre eux, les deux puissances a^n et b^n seront aussi premières entre elles et la frac-

tion $\frac{a^n}{b^n}$ irréductible. On voit d'abord que cette fraction irréductible ne peut être égale à un nombre entier A. Elle ne peut non plus être égale à une fraction irréductible dont les termes ne sont pas des puissances parfaites; car deux fractions irréductibles ne sont égales que si elles ont leurs deux termes égaux respectivement; la fraction proposée aurait ainsi ses deux termes puissances parfaites, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Mais on peut trouver des nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, qui ne diffèrent entre eux que d'une quantité aussi petite qu'on veut $\frac{1}{b}$ (b étant très-grand), et dont les n^{es} puissances comprennent A. Écrivons en effet la quantité proposée A sous la forme

$$\frac{A \times b^n}{b^n},$$

et désignons par a le plus grand nombre eutier dont la n^e puissance soit contenne dans $A \times b^n$; la quantité $A \times b^n$ étant comprise entre a^n et $(a+1)^n$, la quantité $\frac{A \times b^n}{b^n}$ ou A sera évidemment comprise entre

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{et} \quad \left(\frac{a+1}{b}\right)^n.$$

Chacun de ces nombres fractionnaires $\frac{a}{b}$ et $\frac{a+1}{b}$, dont la différence est aussi petite qu'on veut, et dont les puissances comprennent la quantité proposée A, est ce que l'on ap-

pelle la racine approchée de A ; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{A}$.

Il est aisé de voir que ce nombre fractionnaire $\frac{a}{b}$ ou $\frac{a+1}{b}$ représente, avec une approximation aussi grande qu'on veut, une certaine grandeur incommensurable. Considérons en effet, d'une part, les nombres dont les n^{es} puissances sont inférieures à A ; d'autre part, ceux dont les puissances sont supérieures à A, et imaginons les deux séries de grandeurs commensurables de même espèce représentées par ces nombres. Les grandeurs de la première série sont plus petites que celles de la seconde ; la différence $\frac{1}{b}$ entre une grandeur $\frac{a}{b}$ de la première série et une grandeur $\frac{a+1}{b}$ de la seconde série peut être rendue aussi petite qu'on veut. On conçoit donc qu'entre ces deux séries de grandeurs commensurables, il existe une grandeur incommensurable unique et déterminée qui en est la limite commune ; c'est cette grandeur incommensurable que représente le symbole $\sqrt[n]{A}$.

3. On a vu, en géométrie, plusieurs exemples de grandeurs incommensurables. Ainsi, on a démontré que la diagonale d'un carré est incommensurable par rapport au côté pris pour unité : elle est représentée par le symbole $\sqrt{2}$. De même, la circonférence d'un cercle est incommensurable par rapport au diamètre pris pour unité ; mais le nombre incommensurable qui mesure la circonférence ne peut, comme le précédent, être obtenu par des extractions de racines ; on le désigne par la lettre π.

Calcul des nombres incommensurables.

4. Le calcul des nombres incommensurables n'offre aucune difficulté. Les nombres incommensurables n'étant autre chose que des nombres fractionnaires approchés, il est clair que les opérations portent sur ces nombres fractionnaires; le résultat sera lui-même un nombre fractionnaire approché, qui représentera, avec une erreur infiniment petite, une grandeur déterminée, en général incommensurable.

Addition. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'additionner deux nombres incommensurables. Si l'on prend les deux nombres par défaut, puis par excès, on a une première somme plus petite que la seconde; d'ailleurs ces deux sommes diffèrent entre elles aussi peu qu'on veut; donc elles comprennent une grandeur déterminée qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la somme des deux grandeurs incommensurables représentées par les nombres incommensurables proposés.

Soustraction. Il en est de même de la soustraction : si l'on prend le plus grand nombre par défaut, le second par excès, ou, réciproquement, le premier par excès, le second par défaut, on a une première différence plus petite que la seconde, et ces deux différences diffèrent entre elles d'une quantité aussi petite qu'on veut; donc elles comprennent une grandeur qu'elles représentent avec une approximation indéfinie. Cette grandeur est la différence des grandeurs incommensurables que représentent les deux nombres incommensurables proposés.

5. *Mutiplication.* Soit à faire le produit de deux nombres incommensurables, par exemple $\sqrt{7} \times \sqrt{5}$. Si l'on prend

les deux nombres par défaut, puis par excès, on a un premier produit plus petit que le second ; d'ailleurs ces deux produits diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut ; donc ils comprennent une grandeur qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Il est clair que le produit de plusieurs nombres incommensurables ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs, car le produit des nombres fractionnaires approchés ne change pas. Ce théorème fondamental étendu aux nombres incommensurables, toutes ses conséquences le sont par là même ; ainsi on peut grouper deux facteurs en un seul, décomposer au contraire un facteur en deux, etc.

Division. Si l'on prend le dividende par défaut, le diviseur par excès, ou, réciproquement, le dividende par excès, le diviseur par défaut, le premier quotient sera plus petit que le second, et comme leur différence est infiniment petite, ils comprennent entre eux une grandeur déterminée qu'ils représentent avec une approximation indéfinie.

Les propriétés des fractions algébriques, et en général toutes les règles de calcul algébrique, subsistent évidemment quand les lettres désignent des nombres incommensurables. (Voyez l'*Algèbre*, première partie, livre I.)

CHAPITRE II.

CALCUL DES RADICAUX.

6. On appelle en général racine n^e d'un nombre positif a, un nombre positif, commensurable ou incommensurable,

qui, élevé à la n^e puissance, reproduit le nombre proposé. C'est là ce qu'on entend par *valeur arithmétique* d'un radical ; on la désigne par le symbole $\sqrt[n]{a}$. Le nombre n est l'indice du radical. On est convenu de ne pas écrire l'indice quand il s'agit d'une racine carrée : dans ce cas, on sous-entend l'indice 2.

Avant d'aborder le calcul des radicaux, nous établirons quelques lemmes sur les puissances :

7. LEMME I. *On élève un produit à une certaine puissance en élevant chaque facteur séparément à cette puissance.*

En effet,

$$(abc)^n = abc \times abc \times abc \times \ldots\ldots = a^n b^n c^n.$$

LEMME II. *On élève une fraction à une certaine puissance en élevant les deux termes séparément à cette puissance.*

En effet,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots\ldots = \frac{a^n}{b^n}.$$

LEMME III. *Élever un nombre à deux puissances successives revient à l'élever à une puissance ayant pour exposant le produit des exposants.*

En effet,

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots = a^{mn}.$$

COROLLAIRE I. *On élève un monôme à une certaine puissance en élevant son coefficient à cette puissance et multipliant tous les exposants par l'indice de la puissance.*

Soit à élever à la n^e puissance le monôme $5a^3b^2c$. En vertu des lemmes I et III, on aura

$$(5a^3b^2c)^n = 5^n a^{3n} b^{2n} c^n.$$

Corollaire II. Un monôme est une puissance n^e parfaite, lorsque son coefficient est une puissance n^e parfaite et que tous ses exposants sont divisibles par n. Dans ce cas, on obtient la racine n^e du monôme proposé, en extrayant la racine n de son coefficient et divisant par n tous ses exposants.

Venons maintenant au calcul des radicaux.

8. Théorème I. *Le produit de plusieurs radicaux de même indice égale la racine du produit des quantités placées sous les radicaux.*

Je dis, par exemple, que

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce que l'on fait en élevant chaque facteur à cette puissance, on reproduit la quantité abc; donc ce premier membre est la racine n^e de abc.

9. Théorème II. *Le quotient de deux radicaux de même indice égale la racine du quotient des deux quantités placées sous les radicaux.*

Je dis que

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Car si l'on élève le premier membre à la n^e puissance, ce que l'on fait en élevant séparément le numérateur et le dénominateur à cette puissance, on reproduit la fraction $\frac{a}{b}$.

10. Théorème III. *On élève un radical à une certaine*

puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical.

On a, en effet, en vertu du théorème I,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{a}\,.\,.\,.\,.\,.\, = \sqrt[n]{a^m}.$$

11. **Théorème IV.** *On extrait la racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine que l'on veut extraire.*

Je dis que

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

En effet, si l'on élève le premier membre à la puissance m, on trouve $\sqrt[n]{a}$; si l'on élève ensuite ce résultat à la puissance n, on obtient a; mais ceci revient à élever le premier membre à la puissance mn. Ainsi, le premier membre est une quantité qui, élevée à la puissance mn, reproduit a; c'est donc la racine mn^e de a.

12. **Théorème V.** *On ne change pas la valeur d'un radical quand on multiplie ou quand on divise par un même nombre l'indice du radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical.*

Soit le radical

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Je dis qu'en multipliant par un même nombre entier p l'indice n et l'exposant m, on obtient un second radical

$$\sqrt[np]{a^{mp}}$$

égal au premier. En effet, d'après le théorème précédent, le

second radical peut s'écrire

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}}.$$

Mais

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m;$$

donc

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

13. Corollaire I. On *simplifie* un radical en divisant l'indice et l'exposant par leur plus grand commun diviseur. Ainsi

$$\sqrt[12]{a^{20}} = \sqrt[3]{a^5}.$$

14. Corollaire II. On réduit plusieurs radicaux au *même indice* en prenant pour indice commun le produit des indices, ou plus simplement leur plus petit multiple. Cette réduction est nécessaire quand on veut multiplier ou diviser deux radicaux d'indices différents. Ainsi

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n} \times \sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}.$$

$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[6]{b} = \sqrt[12]{a^3} \times \sqrt[12]{b^2} = \sqrt[12]{a^3 b^2}.$$

CHAPITRE III.

EXPOSANTS FRACTIONNAIRES. — EXPOSANTS NÉGATIFS.

Exposants fractionnaires.

15. On a vu que, pour extraire la racine d'une quantité affectée d'un certain exposant, il suffit de diviser l'exposant par l'indice de la racine, lorsque cette division est possible.

Ainsi

$$\sqrt[4]{a^{12}} = a^3.$$

Si, par extension, on applique la même règle dans le cas où l'exposant n'est pas divisible par l'indice de la racine, on obtient un exposant fractionnaire. Soit le radical $\sqrt[5]{a^7}$; l'exposant 7 n'étant pas divisible par l'indice 5, il est impossible d'extraire la racine; mais si l'on applique la règle énoncée plus haut, on est conduit au symbole $a^{\frac{7}{5}}$, que l'on adoptera comme représentant le radical proposé.

En général, on est convenu de représenter un radical quelconque $\sqrt[n]{a^m}$ par le symbole $a^{\frac{m}{n}}$. Le dénominateur de l'exposant fractionnaire remplace ainsi le signe $\sqrt{}$, et les expressions irrationnelles prennent la forme d'expressions rationnelles.

D'après cette convention, les radicaux

$\sqrt{a}$	s'écriront	$a^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{a}$		$a^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt{a^3}$		$a^{\frac{3}{2}}$
$\sqrt[3]{a^2}$		$a^{\frac{2}{3}}$
$7\sqrt[3]{a^3b^2c}$		$7\,ab^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}}$.

16. L'emploi des exposants fractionnaires ne sera vraiment utile que s'il est permis de remplacer un exposant fractionnaire par un autre égal au premier. C'est ce qui a lieu effectivement; car multiplier ou diviser par un même nombre les deux termes d'un exposant fractionnaire, revient à multiplier ou diviser par un même nombre l'indice d'un

radical et l'exposant de la quantité placée sous le radical, ce qui, comme on l'a vu plus haut, ne change pas la valeur du radical.

On pourra donc, si l'on veut, réduire un exposant fractionnaire à sa plus simple expression. Soit, par exemple, le radical $\sqrt[12]{a^{20}}$, qui s'écrit symboliquement $a^{\frac{20}{12}}$; en simplifiant l'exposant fractionnaire $\frac{20}{12}$, on obtient le symbole $a^{\frac{5}{3}}$, qui représente le radical $\sqrt[3]{a^5}$, égal au premier.

Nous ferons voir maintenant que les règles du calcul des exposants entiers s'appliquent aux exposants fractionnaires.

17. ***Multiplication.*** On sait que, pour multiplier deux puissances entières d'un même nombre, il suffit d'ajouter les exposants. La même règle s'applique aux exposants fractionnaires.

Je dis, par exemple, que

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

En effet, les deux puissances fractionnaires $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{p}{q}}$ représentent par convention les deux radicaux $\sqrt[n]{a^m}$ et $\sqrt[q]{a^p}$; pour multiplier ces deux radicaux, on les réduira d'abord au même indice, ce qui donne

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \times a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

Or ce dernier radical, produit des deux premiers, s'écrit

$$a^{\frac{mq+np}{nq}},$$

ou

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}},$$

en remarquant que l'exposant $\frac{mq+np}{nq}$ est la somme des deux fractions $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$. On a donc

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Exemples.

1° $a^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}} = a,$

2° $a \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}},$

3° $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}},$

4° $a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{5}{6}} a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{21}{12}} = a^{\frac{7}{4}}.$

18. *Division.* La règle de la multiplication étant étendue aux exposants fractionnaires, celle de la division l'est par là même. Ainsi, pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'un même nombre, il suffira de retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende.

Je dis que

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};$$

car, si l'on multiplie le quotient par le diviseur, ce que l'on fait en ajoutant les exposants, on reproduit le dividende $a^{\frac{m}{n}}$.

Exemples.

1° $\frac{a}{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{1}{3}},$

$$2^\circ \quad \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}=a,$$

$$3^\circ \quad \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{6}},$$

$$4^\circ \quad \frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{3}{4}}}=a^{\frac{1}{12}}.$$

19. *Puissance.* Nous avons démontré que l'on élève un nombre à deux puissances entières successives en l'élevant à une puissance ayant pour exposant le produit des exposants. La même règle s'applique aux exposants fractionnaires.

Considérons l'expression

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Cette expression signifie

$$\sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p},$$

ou

$$\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}.$$

Il faut élever la quantité $\sqrt[n]{a^m}$ à la puissance p et prendre la racine q^e du résultat. On sait (n° 10) que l'on élève un radical à une puissance en élevant à cette puissance la quantité placée sous le radical ; on a donc

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p=\sqrt[n]{a^{mp}},$$

et par suite

$$\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}}.$$

On sait (n° 11) d'autre part que l'on extrait la racine d'un radical en multipliant l'indice du radical par l'indice de la racine, ce qui donne

$$\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}.$$

On arrive ainsi à l'égalité

$$\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[nq]{a^{mp}}.$$

Le radical $\sqrt[nq]{a^{mp}}$ pouvant être représenté par $a^{\frac{mp}{nq}}$, on a finalement

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}}.$$

L'exposant du résultat est le produit des deux exposants $\frac{m}{n}$ et $\frac{p}{q}$.

Exemples.

1° $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = a^{\frac{3}{2}},$

2° $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = a;$

3° $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{8}{3}} = a^2.$

Exposants incommensurables.

20. Prenons comme exemple l'expression $a^{\sqrt{2}}$. Soient $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$ deux nombres fractionnaires dont les carrés comprennent 2 ; l'expression $a^{\sqrt{2}}$ désignera la limite commune des deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, quand la différence

$\frac{1}{n}$ devient de plus en plus petite. Mais, pour compléter cette définition, il faut démontrer que les deux quantités $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$ tendent effectivement vers une limite commune : c'est ce que nous ferons voir plus tard, quand nous aurons établi quelques propriétés des puissances servant à la définition des logarithmes.

Admettant pour le moment l'existence de cette limite, nous remarquerons que toutes les règles démontrées pour le calcul des exposants fractionnaires s'étendent évidemment aux exposants incommensurables.

Ainsi

$$a^{\sqrt{3}}\ a^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$
$$\left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = a^{\sqrt{6}},$$
$$\left(a^{\sqrt{12}}\right)^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{36}} = a^{6}.$$

Exposants négatifs.

21. Nous savons que pour diviser l'une par l'autre deux puissances d'un même nombre, il suffit de retrancher l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende, lorsque l'exposant du diviseur est plus petit que celui du dividende.

Si l'on applique la même règle lorsque l'exposant du diviseur est plus grand que celui du dividende, on obtient un exposant négatif. Soit le quotient $\frac{a^4}{a^7}$; l'exposant du diviseur étant plus grand que celui du dividende, la division est impossible ; mais, si l'on applique la règle énoncée plus haut, on est conduit au symbole a^{-3} ; le quotient pro-

posé, simplifié, devient $\frac{1}{a^3}$; ainsi le symbole a^{-3} peut être adopté comme représentant le quotient $\frac{1}{a^3}$.

En général, on est convenu de représenter le quotient $\frac{1}{a^m}$, dans lequel l'exposant m est quelconque, entier ou fractionnaire, par le symbole a^{-m}. L'exposant négatif remplace ainsi le signe de la division.

Nous ferons voir que les règles établies précédemment pour le calcul des exposants positifs s'étendent aux exposants négatifs.

22. *Multiplication.* Pour multiplier deux puissances d'un même nombre, il suffit d'ajouter algébriquement les exposants, quels que soient ces exposants, positifs ou négatifs.

1° Considérons d'abord le cas où l'un des exposants est positif, l'autre négatif. Soit à multiplier a^m par a^{-n} (m et n étant deux nombres positifs quelconques, entiers ou fractionnaires, ou même incommensurables); puisque a^{-n} par convention représente $\frac{1}{a^n}$, on a

$$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n};$$

mais le quotient $\frac{a^m}{a^n}$ est représenté dans tous les cas, que m soit plus grand ou plus petit que n, par le symbole a^{m-n}; donc

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}.$$

L'exposant du produit est la somme algébrique des deux exposants.

2° Supposons maintenant les deux exposants négatifs. Soit à multiplier a^{-m} par a^{-n}. Puisque les symboles a^{-m} et a^{-n} désignent les quotients $\frac{1}{a^m}$ et $\frac{1}{a^n}$, on a

$$a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \times a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}.$$

Mais cette dernière expression est représentée par $a^{-(m+n)}$ ou a^{-m-n}. On a donc

$$a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}.$$

L'exposant du produit est encore la somme algébrique des exposants.

Exemples.

1° $a^5 \times a^{-2} = a^3$,
2° $a^{-5} \times a^2 = a^{-3}$,
3° $a^3 \times a^{-3} = a^0 = 1$,
4° $a^{-5} \times a^{-2} = a^{-7}$.

23. *Division.* La règle de la multiplication étant étendue aux exposants négatifs, celle de la division l'est par là même. Pour diviser l'une par l'autre deux puissances quelconques d'un même nombre, il suffit de retrancher algébriquement l'exposant du diviseur de celui du dividende; car, en multipliant le quotient ainsi obtenu par le diviseur, on reproduit le dividende. Remarquons que ceci revient à transformer le diviseur en multiplicateur par le changement de signe de son exposant.

Exemples.

1° $\frac{a^{-3}}{a^2} = a^{-3} \times a^{-2} = a^{-5}$,

2° $\frac{a^3}{a^{-2}} = a^3 \times a^2 = a^5$,

3° $\frac{a^{-3}}{a^{-2}} = a^{-3} \times a^2 = a^{-1}$,

4° $\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3} \times a^5 = a^2$.

24. *Puissance.* Pour élever un nombre à deux puissances successives, il suffit de multiplier entre eux les deux exposants, quels que soient leurs signes.

1° Considérons d'abord le cas où le premier exposant est négatif, le second positif. Soit l'expression $(a^{-m})^n$. Puisque a^{-m} représente $\frac{1}{a^m}$, on a

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}};$$

mais ce résultat peut être représenté par a^{-mn}; donc

$$(a^{-m})^n = a^{-mn}.$$

2° Supposons le premier exposant positif, le second négatif. Soit l'expression $(a^m)^{-n}$; par convention, cette expression représente le quotient

$$\frac{1}{(a^m)^n},$$

qui est égal à $\frac{1}{a^{mn}}$, et qui peut être représenté par a^{-mn}. Donc

$$(a^m)^{-n} = a^{-mn}.$$

3° Supposons enfin les deux exposants négatifs. L'ex-

pression $(a^{-m})^{-n}$ représente le quotient

$$\frac{1}{(a^{-m})^n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^{mn}}\right)}=a^{mn};$$

donc

$$(a^{-m})^{-n}=a^{mn}.$$

Ainsi, dans tous les cas, l'exposant du résultat est le produit algébrique des deux exposants, conformément à la règle des signes.

Exemples.

$$1^\circ \quad (a^{-3})^2=a^{-6},$$
$$2^\circ \quad (a^3)^{-2}=a^{-6},$$
$$3^\circ \quad (a^{-2})^{-3}=a^6.$$

Tout ce que nous avons dit sur le calcul des exposants fractionnaires et négatifs, peut se résumer en deux règles fondamentales :

$$1^\circ \quad a^m\times a^n=a^{m+n},$$
$$2^\circ \quad (a^m)^n=a^{mn},$$

m et n désignant des exposants quelconques, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

LIVRE II.

BINOME.

CHAPITRE PREMIER.

COMBINAISONS.

Arrangements.

25. Je suppose que l'on ait m objets distincts. On appelle *arrangements* de ces m objets n à n les différentes dispositions que l'on peut former avec ces m objets, en les prenant n à n de toutes les manières possibles, et les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Deux arrangements diffèrent, par la nature des objets qui les composent, ou seulement par l'ordre dans lequel ils sont placés.

Par exemple, avec les trois lettres a, b, c, prises deux à deux de toutes les manières, on peut former les six arrangements suivants

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

Le premier et le troisième ne diffèrent que par l'ordre des lettres; de même le second est le cinquième, le quatrième et le sixième.

Nous représenterons en général les m objets par les premières lettres de l'alphabet

$$a, b, c, \ldots\ldots k,$$

et nous désignerons par le symbole A_m^n le nombre des arrangements que l'on peut former avec ces m objets pris n à n de toutes les manières possibles.

On obtient évidemment les arrangements des m lettres une à une, en prenant chacune d'elles séparément, ce qui donne m arrangements,

$$a, b, c, \ldots\ldots k.$$

Ainsi

$$A_m^1 = m.$$

Nous obtiendrons les arrangements des m lettres deux à deux en mettant à la suite de la première lettre a successivement chacune des autres lettres, à la suite de la seconde lettre b successivement chacune des autres, et ainsi de suite, ce qui donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} ab, ac, ad, \ldots\ldots, ak, \\ ba, bc, bd, \ldots\ldots, bk, \\ ca, cb, cd, \ldots\ldots, ck, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ka, kb, kc, \ldots\ldots, kh. \end{array}$$

La première ligne horizontale contenant tous les arrangements qui commencent par la lettre a, la deuxième tous ceux qui commencent par la lettre b, etc., nous avons ainsi formé tous les arrangements des m lettres deux à deux. Puisque chaque ligne horizontale renferme $m - 1$ arrangements, et qu'il y a m lignes, le nombre des arrangements

contenu dans le tableau est $m(m-1)$; on a donc

$$A_m^2 = m(m-1).$$

De même, si à la suite de chacun des arrangements deux à deux on place chacune des $m-2$ autres lettres, on forme les arrangements trois à trois :

$$\begin{array}{l} abc,\ abd,\ \ldots\ldots,\ abk, \\ acb,\ acd,\ \ldots\ldots,\ ack, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ bac,\ bad,\ \ldots\ldots,\ bak, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

A la suite du premier arrangement ab de deux lettres, nous avons écrit chacune des autres lettres $c, d, \ldots\ldots k$; de même, à la suite du second ac, chacune des autres lettres $b, d, \ldots\ldots k$, etc. On a formé ainsi tous les arrangements trois à trois; car un arrangement de trois lettres se compose nécessairement d'un arrangement de deux lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement n'est pas répété deux fois; car les arrangements d'une même ligne horizontale diffèrent par la troisième lettre, et deux arrangements de deux lignes différentes par l'arrangement des deux premières lettres. Chaque ligne horizontale contient $m-2$ arrangements; il y a $m(m-1)$ lignes horizontales, autant que d'arrangements deux à deux; donc le nombre des arrangements des m lettres trois à trois est

$$m(m-1)(m-2);$$

on a donc

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la formule générale

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1).$$

Le nombre des arrangements de m *objets* n *à* n *est égal au produit de* n *nombres entiers consécutifs décroissants à commencer par* m.

26. Il est bon de s'assurer que la formule précédente, écrite par induction, est générale. Supposons que l'on ait formé les arrangements des m lettres $n-1$ à $n-1$, et que l'on veuille former les arrangements n à n. A la suite de chacun des arrangements $n-1$ à $n-1$, on écrira successivement chacune des $m-n+1$ autres lettres. On obtiendra de la sorte tous les arrangements n à n; car un arrangement de n lettres se compose d'un arrangement de $n-1$ lettres suivi d'une autre lettre. Le même arrangement ne se trouve pas répété deux fois; car deux quelconques des arrangements ainsi obtenus diffèrent par la dernière lettre ou par l'arrangement des $n-1$ premières lettres. Chaque arrangement ancien donnant $m-n+1$ arrangements nouveaux, on a la relation générale

$$A_m^n = A_m^{n-1} \times (m-n+1).$$

On en déduit, en donnant successivement à n les valeurs 2, 3, 4, ... n,

$$A_m^2 = A_m^1 \times (m-1) = m(m-1),$$
$$A_m^3 = A_m^2 \times (m-2),$$
$$A_m^4 = A_m^3 \times (m-3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_m^n = A_m^{n-1} \times (m-n+1).$$

Si l'on multiplie toutes ces égalités entre elles, les facteurs intermédiaires disparaissent, et l'on obtient la formule

$$A_m^n = m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1).$$

Applications. 1° Quel est le nombre des arrangements de sept lettres trois à trois? C'est le produit de trois nombres entiers consécutifs décroissants, à commencer par 7.

$$A_7^3 = 7.6.5 = 210.$$

2° Combien y a-t-il de nombres composés de deux chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements avec les neuf chiffres significatifs deux à deux.

$$A_9^2 = 9.8 = 72.$$

3° Combien y a-t-il de nombres composés de cinq chiffres significatifs différents? Autant qu'on peut former d'arrangements cinq à cinq avec les neuf chiffres significatifs.

$$A_9^5 = 9.8.7.6.5 = 15120.$$

Permutations.

27. On appelle *permutations* de m objets les différentes dispositions que l'on peut donner à ces m objets, en les plaçant les uns à côté des autres sur une ligne droite. Chaque permutation contient tous les objets, et deux permutations ne diffèrent que par l'ordre des objets.

Ainsi, avec deux lettres a et b, on peut former deux permutations

$$ab,\ ba.$$

Nous désignerons en général par P_m le nombre des permutations de m objets. Il résulte de la définition que les permutations de m objets ne sont autre chose que les arrangements de ces m objets pris tous ensemble, c'est-à-dire m à m; on a donc, suivant la notation habituelle,

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots.3.2.1,$$

ou, si l'on change l'ordre des facteurs,

$$P_m = 1.2.3.4 \ldots\ldots m.$$

Le nombre des permutations de m *objets égale le produit des* m *premiers nombres entiers.*

Applications. 1° Combien peut-on former de mots de trois lettres avec trois lettres données? C'est le nombre des permutations de trois lettres

$$P_3 = 1.2.3 = 6.$$

2° De combien de manières peut-on disposer dix soldats en ligne? C'est le nombre des permutations de dix objets

$$P_{10} = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 3628800.$$

28. Nous avons déduit la formule des permutations de celle des arrangements comme cas particulièr. Voici comment on peut établir cette formule directement.

On ne peut évidemment donner qu'une disposition à une lettre *a;* ainsi

$$P_1 = 1.$$

Avec deux lettres *a* et *b*, on peut former deux permutations

ab, *ba*,

et l'on a

$$P_2 = 1.2.$$

Si, dans chacune des permutations précédentes, on introduit la lettre *c* à toutes les places, à la fin, au milieu, au commencement, on obtient les permutations de trois lettres *a*, *b*, *c*,

abc, *acb*, *cab*,
bac, *bca*, *cba*.

On a formé ainsi toutes les permutations de trois lettres;

car une permutation de trois lettres se compose d'une permutation des deux premières lettres a et b à laquelle on ajoute la troisième lettre c. La même permutation ne se trouve pas répétée deux fois ; car deux permutations quelconques diffèrent, soit par la place de la lettre c, soit par la disposition des deux autres lettres. Chacune des permutations précédentes donnant trois permutations nouvelles, on a

$$P_3 = P_2 \times 3 = 1.2.3.$$

De même, si dans chacune des permutations des trois lettres a, b, c, on introduit la lettre d à toutes les places, et il y a quatre places, deux intermédiaires et deux extrêmes, on obtient les permutations des quatre lettres a, b, c, d; chacune des permutations précédentes donnant quatre permutations nouvelles, on a

$$P_4 = P_3 \times 4 = 1.2.3.4.$$

En continuant le même raisonnement, on arrive à la formule générale

$$P_m = 1.2.3 \ldots\ldots m.$$

Combinaisons.

29. On appelle *combinaisons* de m objets n à n les différents groupes que l'on peut former avec ces m objets en les prenant n à n, de toutes les manières possibles, de façon que deux groupes diffèrent au moins par la nature d'un objet. Dans les combinaisons on n'a pas égard à la disposition des objets.

Si l'on a m lettres et que l'on imagine qu'elles représentent des quantités différentes, on peut concevoir les combinaisons de ces m lettres n à n comme les différents

produits que l'on peut former avec ces m lettres, en les prenant n à n de toutes les manières possibles.

Par exemple, avec les trois lettres a, b, c, prises deux à deux, on ne peut former que trois combinaisons

$$ab,\ ac,\ bc,$$

tandis que l'on a six arrangements.

Nous désignerons en général par C_m^n le nombre des combinaisons de m objets n à n. La formule des combinaisons se déduit de celle des arrangements et de celle des permutations. Imaginons en effet les combinaisons de m lettres n à n formées. Si nous donnons aux n lettres qui composent chacune de ces combinaisons toutes les dispositions possibles, c'est-à-dire si nous permutons ces n lettres, nous obtiendrons les arrangements des m lettres n à n. Nous aurons ainsi tous les arrangements; car un arrangement quelconque est une combinaison dans laquelle les n lettres qui composent cette combinaison sont disposées dans un certain ordre; et nous n'aurons pas deux fois le même arrangement; car les arrangements fournis par une même combinaison diffèrent par l'ordre des lettres, et ceux qui sont fournis par des combinaisons différentes diffèrent au moins par la nature d'une lettre. Chaque combinaison donnant un nombre d'arrangements marqué par P_n, on a

$$A_m^n = C_m^n \times P_n;$$

d'où

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n},$$

et, en remplaçant par les valeurs connues,

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

Applications. Pour appliquer la formule, on écrit d'abord au dénominateur les n premiers nombres entiers, puis on écrit au numérateur autant de nombres entiers décroissants, à commencer par m.

1° Nombre des combinaisons de 5 objets 2 à 2.

$$C_5^2 = \frac{5.4}{1.2} = 10.$$

2° Nombre des combinaisons de 10 lettres 4 à 4.

$$C_{10}^4 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210.$$

3° Nombre des combinaisons de 10 lettres 6 à 6.

$$C_{10}^6 = \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6} = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210.$$

4° Le nombre des combinaisons de m lettres une à une est m, ce qui est évident *à priori*.

5° Le nombre des combinaisons de m lettres m à m est

$$C_m^m = \frac{m(m-2)\ (m-3)\ .\ .\ .\ .\ .\ 3.2.1}{1.2.3\ .\ .\ .\ .\ .\ m} = 1,$$

Il est évident en effet que si l'on prend toutes les lettres, on ne peut former qu'une seule combinaison.

Nous démontrerons sur les combinaisons deux théorèmes qui nous seront utiles par la suite.

30. THÉORÈME I. *Le nombre des combinaisons de* m *objets* n *à* n *est égal au nombre des combinaisons de ces* m *objets* m—n *à* m—n.

Supposons en effet que l'on ait m numéros dans une urne; si l'on en tire n, il en restera $m-n$ dans l'urne; ainsi à chaque combinaison de n numéros correspond une

combinaison de $m-n$, et réciproquement. On a donc

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

On peut d'ailleurs vérifier aisément l'égalité des deux nombres

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m-n)};$$

car si l'on multiplie les deux termes de la première fraction par le produit $1.2\ldots\ldots(m-n)$, les deux termes de la seconde par $1.2\ldots\ldots n$, les dénominateurs deviennent égaux et l'on a au numérateur le produit des nombres entiers consécutifs de 1 à m; il vient de la sorte

$$C_m^n = C_m^{m-n} = \frac{1.2.3\ldots\ldots m}{1.2\ldots\ldots n \times 1.2\ldots\ldots(m-n)}.$$

Par exemple, le nombre des combinaisons de 5 objets 4 à 4 est égal au nombre des combinaisons de 5 objets 1 à 1, le nombre des combinaisons de 5 objets 3 à 3 est égal au nombre des combinaisons 2 à 2.

31. Théorème II. *Le nombre des combinaisons de* m *objets* n *à* n *est égal au nombre des combinaisons de* m—1 *objets* n *à* n, *plus le nombre des combinaisons de* m—1 *objets* n—1 *à* n—1.

En effet, les combinaisons de m lettres $a, b, c, \ldots\ldots k$, prises n à n, peuvent être distinguées en deux catégories, celles qui ne contiennent pas une certaine lettre k, et celles qui la contiennent. La première catégorie se compose évidemment des combinaisons des $m-1$ premières lettres n à n. On obtiendra celles de la seconde catégorie en formant

les combinaisons des $m-1$ premières lettres $n-1$ à $n-1$, et ajoutant à chacune d'elles la lettre k. On a donc

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}.$$

On peut aussi vérifier facilement cette égalité au moyen de la formule des combinaisons.

Par exemple, le nombre des combinaisons de 7 objets 3 à 3 est égal au nombre des combinaisons de 6 objets 3 à 3, plus le nombre des combinaisons de 6 objets 2 à 2.

Probabilité.

32. On appelle *probabilité* d'un événement le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, lorsque tous ces cas sont également possibles. Je suppose qu'une urne renferme 12 boules d'égale grandeur, 7 blanches et 5 noires. On tire une boule au hasard, et l'on demande la probabilité pour chaque couleur. Il y a 12 cas possibles et également possibles : 7 pour les blanches, 5 pour les noires. La probabilité est donc $\frac{7}{12}$ pour la sortie d'une blanche, $\frac{5}{12}$ pour la sortie d'une noire.

La loterie se composait de 90 numéros; à chaque tirage il en sortait 5 au hasard. Une personne désigne un numéro, par exemple, le numéro 20; si le numéro désigné se trouve parmi les 5 numéros sortants, la personne a gagné; sinon elle a perdu. C'est là ce qu'on appelait prendre un *extrait*. Il est facile d'évaluer la probabilité. Puisqu'on tire 5 numéros à chaque fois, le nombre des cas possibles est le nombre des combinaisons de 90 numéros de 5 à 5,

$$C_{90}^5 = \frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}.$$

Les cas favorables sont les combinaisons qui contiennent le numéro désigné 20; pour les former, imaginons que l'on ôte ce numéro 20 et que l'on combine les 89 autres numéros 4 à 4, puis que l'on ajoute à chacune de ces combinaisons le numéro 20; on aura de cette manière toutes les combinaisons qui contiennent le numéro 20. Ainsi, le nombre des cas favorables est le nombre des combinaisons de 89 numéros 4 à 4,

$$C_{89}^4 = \frac{89.88.87.86}{1.2.3.4}.$$

La probabilité de la sortie du numéro désigné, ou le rapport du nombre des cas favorables au nombre total des cas possibles, est le quotient de C_{89}^4 par C_{90}^5, soit $\frac{5}{90}$ ou $\frac{1}{18}$. Ainsi, sur 18 cas possibles, il y en a 1 favorable à la personne qui prend l'extrait, et 17 pour la loterie. Il faudrait donc parier 1 contre 17. La loterie, au lieu de 17 fois, ne donnait que 15 fois la mise.

Lorsqu'on désigne deux numéros, on prend ce qu'on appelle un *ambe;* si les deux numéros désignés sont tous deux parmi les cinq numéros sortants, on a gagné; sinon on a perdu. Les cas favorables sont les combinaisons qui contiennent les deux numéros désignés; on les formerait en combinant les 88 autres numéros 3 à 3, et ajoutant à chacune des combinaisons les deux numéros désignés. Ainsi, la probabilité de la sortie d'un ambe est le rapport de C_{88}^3 à C_{90}^5, soit $\frac{4.5}{90.89}$ ou $\frac{2}{801}$. Il faudrait donc parier 2 contre 799, ou 1 contre $399 + \frac{1}{2}$; la loterie ne donnait que 270 fois la mise.

On trouvera de même que la probabilité du *terne* est $\frac{1}{11748}$, celle du *quaterne* $\frac{1}{511038}$. La loterie ne donnait que 5500 fois la mise pour le terne, 75000 fois pour le quaterne.

CHAPITRE II.

FORMULE DU BINOME.

33. On sait que le produit de deux polynômes est égal à la somme des produits que l'on obtient en multipliant chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur. En général, le produit de plusieurs polynômes est la somme des produits que l'on obtient en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chacun des polynômes proposés.

Proposons-nous d'abord d'effectuer le produit des m facteurs binômes

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,\ldots\ldots\,(x+h)\,(x+k),$$

en l'ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x.

Le produit de ces m facteurs binômes est la somme des produits obtenus en prenant de toutes les manières possibles un terme dans chacun d'eux. Si l'on prend les m premiers termes, on obtient le premier terme x^m du produit. Si l'on prend le second terme a dans le premier facteur binôme, et le premier terme x dans tous les autres, on ob-

tient le produit ax^{m-1} qui est du degré $m-1$; prenant de même le second terme b dans le second facteur binôme et le premier terme x dans tous les autres, on a bx^{m-1}; en un mot, le second terme de l'un quelconque des facteurs binômes, combiné avec les premiers termes de tous les autres, donne au produit un terme en x^{m-1}. Réunissant tous ces termes du degré $m-1$, on voit que x^{m-1} a pour multiplicateur la somme des m quantités a, b, c,..... k, somme que pour abréger nous désignerons par S_1. Ainsi le second terme du produit est S_1x^{m-1}.

Prenons maintenant les seconds termes dans deux quelconques des facteurs binômes, et les premiers dans tous les autres, nous formerons les termes du degré $m-2$, tels que abx^{m-2}, acx^{m-2}, bcx^{m-2}, etc. Si nous réunissons tous ces termes, nous voyons que x^{m-2}, mis en facteur commun, sera multiplié par la somme des combinaisons deux à deux des m lettres a, b.,..... k. Désignons par S_2 la somme de ces combinaisons, le troisième terme du produit sera S_2x^{m-2}.

En prenant de même les seconds termes dans trois quelconques des facteurs binômes et les premiers dans tous les autres, on formera les termes du degré $m-3$, tels que $abcx^{m-3}$, $abdx^{m-3}$, etc. Réunissant ces termes en un seul, et appelant S_3 la somme des combinaisons trois à trois des lettres a, b,..... k, on obtient le quatrième terme S_3x^{m-3} du produit.

En général, si l'on prend les seconds termes dans n quelconques des facteurs binômes et les premiers dans les $m-n$ autres, on forme les termes du degré $m-n$; réunissant ces termes et représentant par S_n la somme des combinaisons n à n des m lettres a, b,..... k, on a le terme général S_nx^{m-n} du produit.

On obtient les termes du premier degré en prenant

les seconds termes dans tous les facteurs binômes, excepté un, et le premier dans cet autre; ces termes réunis donnent l'avant-dernier terme du produit $S_{m-1}x$. Enfin le produit $abc.....k$ des seconds termes de tous les facteurs binômes, produit que nous désignerons par S_m, donne le dernier terme du produit demandé.

Ainsi le produit des m facteurs binômes se développe de la manière suivante :

$$x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} ..... + S_nx^{m-n} ..... + S_{m-1}x + S_m.$$

34. Supposons maintenant que les quantités $a, b, c....k$ soient égales entre elles, le produit des m facteurs binômes

$$(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x+k),$$

devient $(x+a)^m$. Voyons à quoi se réduit le développement : la somme S_1 des quantités $a, b, c....k$ se réduit à ma, puisque chacune de ces quantités devient égale à a et qu'il y en a m. La lettre S_2 désigne la somme des combinaisons deux à deux de ces mêmes quantités; chacune de ces combinaisons devient égale à a^2; et il y en a un nombre marqué par le nombre des combinaisons de m lettres deux à deux, soit $\frac{m(m-1)}{1.2}$; leur somme S_2 est donc égale à $\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$. De même S_3 désigne la somme des combinaisons trois à trois; chacune de ces combinaisons devenant égale à a^3 et leur nombre étant $\frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.2.3}$, leur somme égale $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$.

En général, S_n désigne la somme des combinaisons n à n des m quantités $a, b, c.....k$; ces quantités devenant égales

à a, chacune des combinaisons se réduit à a^n; leur nombre étant le nombre des combinaisons de m lettres n à n, on a

$$S_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}a^n.$$

Enfin, le dernier terme, ou le produit des m quantités égales $a, b,\ldots\ldots k$, se réduit à a^m.

On a ainsi la formule

$$(1)\quad (x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3} + \ldots\ldots + \frac{m}{1}a^{m-1}x + a^m,$$

connue sous le nom de *formule du binôme*. Elle est très-fréquemment employée; elle sert à former le développement d'une puissance quelconque d'un binôme. Le terme général, celui qui occupe le $n+1^e$ rang dans le développement, est, comme nous l'avons dit,

$$(2)\quad \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}a^nx^{m-n}.$$

Si dans la formule (1) on remplace a par $-a$, on obtient le développement de $(x-a)^m$,

$$(x-a)^m = x^m - \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} - \ldots\ldots \pm a^m;$$

les signes alternent.

35. Remarque I. Dans la formule du binôme, les exposants de x vont en diminuant graduellement d'une unité, ceux de a vont au contraire en augmentant; la somme des exposants de a et de x dans chaque terme est constamment égale à m.

Le nombre des termes du développement est $m+1$; car les exposants de x forment la suite des m premiers nombres entiers, plus l'exposant zéro du dernier terme,

$$m,\ m-1,\ m-2,\ \ldots\ldots,\ 1,\ 0,$$

en tout $m+1$ termes.

36. Remarque II. *Les coefficients des termes également distants des extrêmes sont égaux.* Si l'on écrit la formule du binôme en laissant les lettres qui marquent les nombres de combinaisons, on a

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 a x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \ldots\ldots + C_m^{m-2} a^{m-2} x^2 + C_m^{m-1} a^{m-1} x + a^m.$$

Le premier terme et le dernier ont tous deux pour coefficients l'unité, le second terme et l'avant-dernier ont pour coefficient C_m^1 et C_m^{m-1}; mais, en vertu d'un théorème démontré (n° 30), on sait que ces deux nombres sont égaux. De même les troisièmes termes, à partir des deux extrêmes, ont pour coefficients les nombres égaux C_m^2 et C_m^{m-2}, etc.

37. Remarque III. Les coefficients se déduisent les uns des autres par une loi très-simple : *Multipliez le coefficient du dernier terme obtenu par l'exposant de* x *dans ce terme et divisez par le rang de ce terme, vous aurez le coefficient du terme suivant.*

En effet, nous avons trouvé pour le $n+1$e terme du développement

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)n} a^n x^{m-n};$$

le terme précédent est

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots\ldots(n-1)} a^{n-1} x^{m-n+1}.$$

On déduit le $n+1^e$ terme du précédent en augmentant d'une unité l'exposant de a et diminuant d'une unité celui de x. Quant au coefficient, on le forme en multipliant le coefficient précédent par l'exposant $m-n+1$ de x dans ce terme précédent, et divisant par n, rang de ce terme.

Exemples.

Il importe de s'exercer à développer rapidement la puissance d'un binôme. La règle que nous venons d'indiquer facilite beaucoup le calcul.

1° $$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7.$$

Pour passer du second terme au troisième, il faut multiplier par 6 et diviser par 2, ce qui revient à multiplier par 3. Pour passer du troisième terme au quatrième, il faut multiplier par 5 et diviser par 3; on divisera d'abord 21 par 3; ce qui donne 7, et l'on multipliera par 5, ce qui donne 35. Le développement contenant 7 + 1 ou 8 termes, et les termes également distants des extrêmes étant égaux, une fois trouvés les quatre premiers, on écrira les quatre autres immédiatement.

2° $$(x+a)^8 = x^8 + 8ax^7 + 28a^2x^6 + 56a^3x^5 + 70a^4x^4 + 56a^5x^3 + 28a^6x^2 + 8a^7x + a^8.$$

Le développement contient 9 termes; il est nécessaire de calculer les cinq premiers; arrivé au terme $70a^4x^4$, on remarque que les coefficients se reproduisent.

3° $$(x-a)^{11} = x^{11} - 11ax^{10} + 55a^2x^9 - 165a^3x^8 + 330a^4x^7 - 462a^5x^6 + 462a^6x^5 - 330a^7x^4 + 165a^8x^3 - 55a^9x^2 + 11a^{10}x - a^{11}.$$

Le nombre des termes étant pair, le dernier terme a le signe —, et les termes qui ont même coefficient sont affectés de signes contraires.

$$4^\circ\ (x-a)^{12}=x^{12}-12ax^{11}+66a^2x^{10}-220a^3x^9+495a^4x^8 -792a^5x^7+924a^6x^6-792a^7x^5+495a^8x^4-220a^9x^3 +66a^{10}x^2-12a^{11}x+a^{12}.$$

Le développement contenant un nombre impair de termes, le dernier a le signe + et les termes qui ont même coefficient sont affectés du même signe.

38. Remarque IV. *Les coefficients vont en augmentant du commencement jusqu'au milieu du développement et en diminuant du milieu à la fin.* En effet, le rapport du coefficient du $n+1^e$ terme à celui du terme précédent est, comme nous l'avons dit,

$$\frac{m-n+1}{n}.$$

C'est par ce rapport que l'on multiplie le coefficient du n^e terme pour former celui du $n+1^e$ terme. Les coefficients vont en croissant tant que ce multiplicateur reste supérieur à l'unité; ils vont au contraire en décroissant quand ce multiplicateur devient inférieur à l'unité. Posons donc

$$\frac{m-n+1}{n}>1,$$

et résolvons cette inégalité par rapport à n, nous aurons

$$n<\frac{m+1}{2}.$$

La fraction $\frac{m+1}{2}$ désigne la moitié du nombre des termes

du développement; ainsi les coefficients vont en croissant jusqu'au milieu. A partir du milieu, l'inégalité change de sens et les coefficients décroissent.

Il y a deux cas à distinguer : 1° lorsque m est pair, le nombre des termes $m + 1$ est impair; il y a au milieu *un* coefficient plus grand que tous les autres. Ainsi dans le développement de $(x + a)^8$, dont nous n'écrivons ici que les coefficients

$$1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1,$$

le coefficient 70 est le plus grand; 2° lorsque m est impair, le nombre des termes est pair, il y a au milieu *deux* coefficients égaux plus grands que tous les autres. Ainsi dans le développement de $(x + a)^7$, dont les coefficients sont

$$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1,$$

les deux coefficients 35 du milieu sont les plus grands.

Ce qui précède donne une propriété des combinaisons qu'il est bon de remarquer. On demande, par exemple, de quelle manière il faut combiner huit objets pour avoir le plus grand nombre de combinaisons. Il est clair qu'il faut les combiner 4 à 4; car les coefficients du développement de $(x + a)^8$, à partir du second, sont les nombres de combinaisons que l'on peut former avec 8 objets, en les prenant 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc...; le plus grand coefficient étant le cinquième, il en résulte que le nombre des combinaisons des 8 objets 4 à 4 surpasse les autres nombres de combinaisons. De même, avec 7 objets, on obtient le plus grand nombre de combinaisons en les prenant 3 à 3 ou 4 à 4.

39. Remarque V. Si dans le développement de $(x + a)^m$ on fait $x = 1$ et $a = 1$, chaque terme se réduit à son coeffi-

cient, et l'on a

$$2^m = 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots\ldots + 1.$$

Ainsi la somme des coefficients du développement est égale à 2^m.

En retranchant le premier coefficient qui ne désigne pas un nombre de combinaisons, on en conclut que le nombre total des combinaisons qu'on peut faire avec m objets, en les prenant de toutes les manières possibles, soit 1 à 1, soit 2 à 2, etc., est $2^m - 1$,

$$C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \ldots\ldots + C_m^m = 2^m - 1.$$

40. Remarque VI. Si dans le développement de $(x-a)^m$ on fait $x = 1$ et $a = 1$, on a

$$o = 1 - C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots\ldots \pm C_m^m,$$

d'où l'on déduit

$$C_m^1 + C_m^3 + \ldots\ldots = 1 + (C_m^2 + C_m^4 + \ldots\ldots).$$

Ainsi, quand on forme toutes les combinaisons possibles avec m objets, le nombre des combinaisons qui renferment un nombre impair d'objets surpasse d'une unité le nombre des combinaisons qui renferment un nombre pair d'objets. Si donc on appelle u et v ces deux nombres de combinaisons, on a

$$u + v = 2^m - 1$$
$$u - v = 1.$$

On en déduit

$$u = 2^{m-1}, \quad v = 2^{m-1} - 1.$$

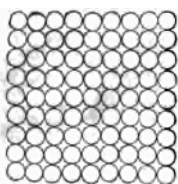
Par exemple, avec 10 objets on peut former en tout $2^{10} - 1$, c'est-à-dire 1023 combinaisons. Parmi ces combinaisons 512 contiennent un nombre impair d'objets, 511 un nombre pair.

CHAPITRE III.

NOMBRES FIGURÉS, PILES DE BOULETS.

Pyramide à base carrée.

41. Considérons une pyramide ayant pour base un carré de m boulets au côté; sur la base est placé un autre carré ayant $m-1$ boulets au côté, et ainsi de suite jusqu'au sommet formé d'un seul boulet. Le nombre des boulets contenus dans chaque tranche étant un carré parfait, le nombre total des boulets contenus dans la pyramide est la somme des carrés des m premiers nombres entiers.



Voici une manière très-simple d'obtenir cette somme. Si dans l'égalité

$$(m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1,$$

on donne à m successivement les m valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots m$, on a

$$\begin{aligned}
2^3 &= 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1,\\
3^3 &= 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1,\\
4^3 &= 3^3 + 3.3^2 + 3\,3 + 1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(m+1)^3 &= m^3 + 3.m^2 + 3m + 1;
\end{aligned}$$

en faisant la somme et supprimant les nombres $2^3, 3^3, \ldots\ldots, m^3$, qui se trouvent dans les deux membres, on obtient l'égalité.

$$\begin{aligned}
(m+1)^3 = 1^3 &+ 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + m^2)\\
&+ 3(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + m) + m.
\end{aligned}$$

Si, pour simplifier, on désigne par S_1 la somme des m premiers nombres entiers, et par S_2 la somme de leurs carrés, cette égalité s'écrit

$$(m+1)^3 = 1 + 3(S_2 + S_1) + m;$$

d'où

$$3(S_2 + S_1) = (m+1)^3 - (m+1) = (m+1)(m^2+2m)$$
$$= m(m+1)(m+2).$$

La somme des m premiers nombres entiers étant la somme des termes d'une progression arithmétique, on a

$$S_1 = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Si l'on remplace S_1 par sa valeur, il vient

$$3S_2 = m(m+1)(m+2) - \frac{3m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{2};$$

d'où

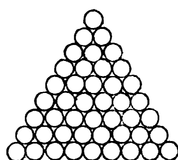
$$(1) \qquad S_2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Telle est la formule qui donne le nombre des boulets contenus dans la pyramide à base carrée. Par exemple, si $m = 10$, on trouve $S_2 = 385$.

Pyramide triangulaire.

42. Une pile de boulets triangulaire a pour base un triangle équilatéral ayant m boulets au côté; sur la base est placé un autre triangle ayant $m-1$ boulets au côté; sur celui-ci un triangle ayant $m-2$ boulets au côté, et ainsi de suite jusqu'au sommet qui est formé d'un seul boulet.

Chaque triangle est formé de lignes de boulets disposées



comme l'indique la figure; la première ligne contient 1 boulet, la seconde 2, la troisième 3, etc.; de sorte que le nombre des boulets contenus dans un triangle ayant m boulets de côté est la somme des m premiers nombres entiers, c'est-à-dire $\frac{m(m+1)}{2}$. Mais on a

$$\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m^2}{2}+\frac{m}{2}.$$

Il en résulte que le nombre total des boulets, contenus dans la pile triangulaire qui a m boulets au côté de la base, est égal à la moitié de la somme des carrés des m premiers nombres, plus la moitié de la somme de ces m premiers nombres. On a donc en désignant par x le nombre cherché

$$(2) \qquad x=\frac{S_2+S_1}{2}.$$

Nous avons trouvé dans le numéro précédent

$$3(S_2+S_1)=m(m+1)(m+2).$$

On en déduit

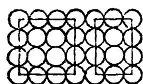
$$x=\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.$$

Par exemple, si la pyramide a 8 boulets de côté à la base, elle renferme $\frac{8.9.10}{1.2.3}$ ou 120 boulets.

Pile à base rectangulaire.

43. Imaginons une pile ayant pour base un rectangle de m boulets d'un côté sur n de l'autre, m étant plus

grand que n; sur la base est placé un second rectangle de $m - 1$ boulets sur $n - 1$; sur celui-ci un troisième rectangle de $m - 2$ boulets sur $n - 2$; et ainsi de suite. On arrive enfin au n^e rectangle qui a $m - (n - 1)$ boulets à l'un de ses côtés sur $n - (n - 1)$ à l'autre, c'est-à-dire $m - n + 1$ sur 1; c'est une ligne ou arête de $m - n + 1$ boulets qui forme le sommet de la pile.



Si l'on redescend du sommet à la base, on trouve d'abord la file supérieure de $m - n + 1$ boulets; au-dessous est un rectangle composé de 2 files renfermant chacune $m - n + 2$ boulets; au-dessous un troisième rectangle renfermant $3(m - n + 3)$ boulets et ainsi de suite. En général le rectangle de rang k, à partir du sommet, contient $k(m - n + k)$ boulets; mais on a

$$k(m - n + k) = k(m - n) + k^2.$$

Si dans cette égalité on donne à k successivement les n valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, afin d'obtenir les n rectangles dont se compose la pile, on a

$$\begin{aligned}
1(m - n + 1) &= 1(m - n) + 1^2,\\
2(m - n + 2) &= 2(m - n) + 2^2,\\
3(m - n + 3) &= 3(m - n) + 3^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
n(m - n + n) &= n(m - n) + n^2.
\end{aligned}$$

En faisant la somme, on voit que le nombre total des boulets contenus dans la pile rectangulaire est égal à la somme des carrés des n premiers nombres, plus la somme de ces nombres multipliée par $m - n$. On a donc, en appelant x le nombre cherché,

$$x = S_2 + (m-n)S_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(m-n)n(n+1)}{2},$$

ou, plus simplement,

$$(3) \qquad x = \frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

Par exemple, si le rectangle de base a 15 boulets d'un côté sur 10 de l'autre, la pile contiendra $\frac{10.11.36}{6}$ ou 660 boulets.

La méthode que nous avons employée revient à décomposer un rectangle quelconque $k(m-n+k)$ en un carré k^2 et un rectangle $(m-n)k$ comme l'indique la figure, et il est à remarquer que ce second rectangle a un côté constant $m-n$, ce qui permet de faire la somme.

Triangle de Pascal.

44. On appelle triangle arithmétique, ou triangle de Pascal, le tableau suivant qui renferme les coefficients des puissances successives du binôme :

1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

. . . .

La première ligne horizontale renferme les coefficients de la première puissance du binôme $x+a$, la deuxième les coefficients du développement de $(x+a)^2$, la troisième ceux de $(x+a)^3$; en général la m^e ligne horizontale renferme les coefficients du développement de $(x+a)^m$, c'est-à-dire en mettant à part le premier coefficient 1, les nombres de combinaisons de m objets, pris 1 à 1, 2 à 2, etc.

En faisant abstraction de la colonne des unités, on voit que la première colonne verticale contient les nombres de combinaisons une à une de 1, 2, 3,..... objets, la seconde les nombres de combinaisons deux à deux de 2, 3, 4,..... objets; en général la n^e colonne (toujours abstraction faite de celle des unités que l'on ne compte pas) contient les nombres de combinaisons n à n de n, $n+1$, $n+2$,..... objets.

En un mot la m^e ligne horizontale renferme les nombres de combinaisons de m objets, la n^e colonne verticale les nombres de combinaisons n à n. Ainsi le nombre placé à l'intersection de la m^e ligne horizontale et de la n^e colonne verticale est C_m^n.

Chaque nombre du triangle arithmétique égale le nombre placé au-dessus de lui, plus le nombre placé à gauche de ce dernier. Ainsi le nombre 35 de la 7e ligne égale le nombre 20 placé au-dessus de lui, plus le nombre 15 placé à gauche de 20. Ceci résulte de la relation

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1},$$

que nous avons démontré n° 42; C_{m-1}^n est effectivement placé au-dessus de C_m^n dans la même colonne verticale, et C_{m-1}^{n-1} est placé à gauche de C_{m-1}^n dans la même ligne horizontale.

Cette propriété sert à la formation du tableau : supposons écrites les trois premières lignes, on dira 3 et 1 font 4, 3 et 3 font 6, 1 et 3 font 4; écrivant à la suite l'unité, on aura la quatrième ligne. On dira de même 4 et 1 font 5, 6 et 4 font 10, 4 et 6 font 10, 1 et 4 font 5, et l'on écrira à la suite l'unité, ce qui donne la cinquième ligne, et ainsi de suite. Chaque ligne horizontale se déduit de la ligne précédente.

45. THÉORÈME. *La somme des* m *premiers nombres d'une colonne verticale quelconque est le* m^e *nombre de la colonne suivante.*

En d'autres termes, le m^e nombre d'une colonne verticale quelconque est la somme des m premiers nombres de la colonne précédente ; ceci résulte de la loi de formation du tableau. Considérons, par exemple, le nombre 56, sixième nombre de la troisième colonne (on fait toujours abstraction de la colonne des unités); ce nombre égale 21 plus 35, mais 35 égale 15 plus 20, 20 égale 10 plus 10, 10 égale 6 plus 4, 4 égale 3 plus 1; on a donc

$$56 = 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1;$$

donc ce nombre 56 est la somme des six premiers nombres de la deuxième colonne.

A l'inspection du tableau on voit que le premier nombre de la n^e colonne verticale se trouve dans la n^e ligne horizontale; le second dans la $n+1^e$, le troisième dans la $n+2^e$. En général le m^e nombre de la n^e colonne verticale se trouve dans la $m+n-1$ ligne horizontale; c'est donc

$$C^n_{m+n-1} = \frac{(m+n-1)(m-n-2)\ldots\ldots m}{1.2.3\ldots\ldots n},$$

ou

(4) $$\frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+n-1)}{1.2\ldots\ldots n}.$$

46. Les propriétés du triangle de Pascal permettent de trouver immédiatement le nombre des boulets contenus dans une pile triangulaire, nombre que nous avons déjà obtenu par un autre procédé. La première colonne verticale comprend les nombres entiers consécutifs, ou les nombres figurés du premier ordre. Un triangle de m boulets au côté étant formé de m files successives, le nombre des boulets contenus dans ce triangle est la somme des m premiers nombres de la première colonne verticale; c'est le m^e nombre de la seconde colonne, soit, en faisant $n = 2$ dans la formule (4),

$$\frac{m(m+1)}{1.2}.$$

Ainsi les nombres 1, 3, 6,....., de la deuxième colonne verticale du triangle arithmétique sont les nombres *triangulaires*, ou les nombres figurés du second ordre. Ces nombres sont représentés par la formule générale $\frac{m(m+1)}{1.2}$.

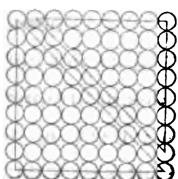
Une pile triangulaire de m boulets au côté de base est formée de m triangles successifs; si l'on descend du sommet à la base, on voit que la pyramide est la somme des m premiers nombres triangulaires, c'est-à-dire des m premiers nombres de la deuxième colonne verticale du triangle arithmétique; c'est le m^e nombre de la troisième colonne, soit, en faisant $n=3$ dans la formule (4),

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.$$

Ainsi les nombres 1, 4, 10, 20, 35,....., inscrits dans la troisième colonne verticale sont les nombres pyramidaux,

ou les nombres figurés du troisième ordre. Les nombres de la colonne suivante expriment des sommes de pyramides, et ainsi de suite.

Après avoir évalué de cette manière la pyramide triangulaire, on obtient aisément la pyramide à base carrée. On peut décomposer le carré de base en deux triangles



équilatéraux ayant, le premier m boulets au côté, le second $m-1$; si l'on imagine chaque carré décomposé de la même manière, on voit que la pyramide carrée est la réunion de deux pyramides triangulaires ayant, la première m boulets au côté de base, la seconde $m-1$. Le nombre des boulets contenus dans la pyramide carrée est donc la somme des nombres de boulets

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + \frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}.$$

contenus dans les deux pyramides triangulaires, soit, en simplifiant,

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

47. Comme dernière application du triangle arithmétique, cherchons la somme des cubes des m premiers nombres

$$1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots\ldots + m^3.$$

Un cube quelconque m^3 peut s'écrire

$$m^3 = m(m^2-1) + m = (m-1)m(m+1) + m$$
$$= 6\frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3} + m.$$

Le nombre $\frac{(m-1)m(m+1)}{1.2.3}$ est le $m-1^e$ nombre de la troisième colonne verticale du triangle arithmétique. La somme des cubes des m premiers nombres égale donc six fois la somme des $m-1$ premiers nombres de la troisième colonne, plus la somme des m premiers nombres. La somme des $m-1$ premiers nombres de la troisième colonne est le $m-1^e$ nombre de la quatrième colonne, soit, en remplaçant m par $m-1$ et n par 4 dans la formule (4),

$$\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{1.2.3.4}.$$

On a ainsi pour la somme des cubes des m premiers nombres

$$\frac{(m-1)m(m+1)(m+2)}{4}+\frac{m(m+1)}{2}=\frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Il en résulte que la somme des cubes des m premiers nombres égale le carré de la somme de ces m premiers nombres.

CHAPITRE IV.

PUISSANCE D'UN POLYNÔME.

Permutations avec répétition.

48. Nous avons désigné par P_m le nombre des permutations que l'on peut former avec m lettres, quand toutes les lettres sont différentes. Supposons maintenant que, parmi

ces m lettres, il y en ait α égales à a, les autres, b, c, d,..... étant différentes ; voyons à quoi se réduit le nombre des permutations. Appelons x le nombre des permutations différentes que l'on peut former avec les m lettres proposées, parmi lesquelles α sont égales à a. Si, dans chacun de ces arrangements, on laisse les lettres b, c, d..... à leurs places, et qu'on permute entre elles les α lettres a, on n'apportera aucun changement apparent dans l'arrangement ; mais si l'on affecte les lettres a d'indices,

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots\ldots a_x,$$

afin de les distinguer les unes des autres, chacun des x arrangements précédents produira P_α arrangements distincts. Comme on a maintenant m lettres différentes, on a formé de la sorte les P_m permutations de m lettres différentes. On a ainsi

$$P_m = x \times P_\alpha,$$

d'où

$$x = \frac{P_m}{P_\alpha}.$$

Par exemple, avec les trois lettres a, a, b, dont deux sont égales à a, on ne peut former que $\frac{P_3}{P_2}$, c'est-à-dire 3 permutations différentes :

$$aab,\ aba,\ baa.$$

Pour reprendre le raisonnement sur cet exemple, afin de le rendre plus sensible, affectons d'indices les deux lettres a et permutons les deux lettres a_1 et a_2 ; le premier arrangement aab fournira deux arrangements distincts, a_1a_2b, a_2a_1b ; le second aba fournira de même $a_1b_3a_2$, $a_2b_3a_1$; le

troisième donnera ba_1a_2, ba_2a_1 ; on aura formé ainsi les six permutations

$$a_1a_2b,\ a_1ba_2,\ ba_1a_2,$$
$$a_2a_1b,\ a_2ba_1,\ ba_2a_1,$$

des trois lettres différentes a_1, a_2, b.

49. Supposons que, parmi les m lettres, il y en ait α égales à a et β égales à b, les autres étant différentes, et appelons x le nombre des permutations que l'on peut former avec ces m lettres. Si l'on affecte d'indices les β lettres b, afin de les distinguer les uns des autres, et que, dans chacun des arrangements précédents, on permute ces β lettres, chacun de ces x arrangements fournira P_β arrangements distincts, et l'on aura en tout $x \times P_\beta$ arrangements; ce sont les permutations de m lettres, parmi lesquelles α sont égales à a, les autres étant différentes; le nombre de ces permutations étant égal à $\frac{P_m}{P_\alpha}$, on a

$$x \times P_\beta = \frac{P_m}{P_\alpha};$$

d'où

$$x = \frac{P_m}{P_\alpha . P_\beta}.$$

On peut continuer le même raisonnement indéfiniment. Si, parmi les m lettres, α sont égales à a, β à b, γ à c, les autres étant différentes, le nombre des permutations que l'on peut former avec ces m lettres sera exprimé par la formule

$$\frac{P_m}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma},$$

et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on a cinq lettres a, trois lettres b, deux lettres c, et une lettre d, avec ces onze lettres on peut former un nombre de permutations marqué par

$$\frac{P_{11}}{P_5 . P_3 . P_2 . P_1} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}{1.2.3.4.5 \times 1.2.3 \times 1.2 \times 1} = 27720.$$

Puissance d'un polynôme.

50. Proposons-nous actuellement d'effectuer le développement de la puissance d'un polynôme,

$$(a + b + c + \ldots\ldots + k)^m,$$

c'est-à-dire d'effectuer le produit de m polynômes égaux entre eux; on sait que le produit de plusieurs polynômes est la somme des produits que l'on obtient en prenant un terme dans chacun d'eux. Si nous prenons la lettre a dans α facteurs, la lettre b dans β autres, la lettre c dans γ autres, etc., nous aurons un terme de la forme

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots;$$

la somme des exposants, où le degré du terme est constamment égale à m. Il est évident que l'on obtient plusieurs fois ce même terme, autant de fois que l'on peut former d'arrangements avec α lettres égales à a, β lettres égales à b, γ égales à c, etc.; car à chacun des arrangements correspond une manière particulière d'obtenir le terme $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$; en réunissant ces termes égaux, on aura

$$\frac{P_m}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma \ldots\ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots$$

Le développement peut donc être représenté par la formule

$$(a+b+c\ldots\ldots)^m=\sum\frac{P_m}{P_\alpha.P_\beta.P_\gamma\ldots\ldots}a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots$$

le signe Σ indiquant une somme de termes de la même forme.

Toutefois, si l'un des exposants α, β, γ,....., devient égal à zéro, il faut convenir que le symbole P_0, qui n'a aucun sens par lui-même, sera remplacé par l'unité. Supposons, par exemple, $\alpha=0$; on prend la lettre b dans β facteurs, la lettre c dans γ facteurs; le terme $b^\beta c^\gamma$,....., dant lequel la somme $\beta+\gamma+\ldots\ldots$ des exposants est égal à m, est répété un nombre de fois marqué par le nombre des permutations que l'on peut former avec β lettres b, γ lettres c,..... Ce nombre est $\frac{P_m}{P_\beta P_\gamma\ldots}$; la formule générale conviendra, si l'on remplace P_α ou P_0 par l'unité.

51. Considérons en particulier le carré $(a+b+c+\ldots)^2$ d'un polynôme, ou le produit

$$(a+b+c+\ldots\ldots)\times(a+b+c+\ldots\ldots)$$

de deux polynômes égaux. Si l'on prend la même lettre a dans les deux polynômes, on a le terme a^2; comme on ne peut obtenir ce terme que de cette manière, son coefficient est l'unité. Si l'on prend une lettre a dans l'un des polynômes, et une autre lettre b dans l'autre, on a le terme ab; il est évident que ce terme peut être obtenu de deux manières, soit qu'on prenne la lettre a dans le premier polynôme, la lettre b dans le second, ou la lettre a dans le second, la lettre b dans le premier; ces deux manières correspondent aux deux arrangements ab et ba; le coefficient

de ce terme sera donc égal à 2, et l'on aura $2ab$. On conclut de là, que *le carré d'un polynôme est égal à la somme des carrés de tous les termes, plus deux fois la somme des produits de ces termes deux à deux.*

Si l'on applique la formule générale au développement de la puissance d'un binôme, on a

$$(a+b)^m = \sum \frac{P_m}{P_\alpha P_\beta} a^\alpha b^\beta.$$

Cette formule est la même que celle trouvée précdemment, puisque $\alpha+\beta=m$, et que (n° 30)

$$\frac{P_m}{P_\alpha \cdot P_{m-\alpha}} = C_m^\alpha = C_m^{m-\alpha}.$$

52. Il est facile d'évaluer le nombre des termes contenus dans le développement de la puissance m^e d'un polynôme. Et d'abord, quand le polynôme n'a que deux termes, le développement en contient $m+1$. Supposons que le polynôme ait trois termes, on écrira, en groupant les deux derniers

$$(a+b+c)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}(b+c) + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}(b+c)^2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots + (b+c)^m;$$

puis on développera les puissances successives du binôme $b+c$; le nombre total des termes est

$$1+2+3+\ldots\ldots+(m+1);$$

c'est la somme de $m+1$ premiers nombres figurés du premier ordre, c'est-à-dire le $m+1^e$ nombre figuré du second ordre, ou $\dfrac{(m+1)\,(m+2)}{1.\,2}$.

Si le polynôme a quatre termes, on écrira

$$(a+b+c+d)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}(b+c+d)$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}(b+c+d)^2 + \ldots\ldots + (b+c+d)^m;$$

puis on développera les puissances successives dn trinôme $b+c+d$; le nombre total des termes sera la somme des $m+1$ premiers nombres figurés du second ordre, c'est-à-dire le $m+1^e$ nombre figuré du troisième ordre, ou $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}$. En général, si le polynôme proposé a n termes, le nombre des termes du développement sera égal au $m+1^e$ nombre figuré de l'ordre $n-1$, c'est-à-dire à

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1)}{1.2 \quad \ldots\ldots \quad (n-1)}.$$

Dans la pratique, au lieu d'appliquer la formule (1), on préfère ordinairement procéder comme nous venons de le faire.

LIVRE III.

SÉRIES.

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES SÉRIES.

53. On appelle *série*, en mathématique, une suite indéfinie de quantités qui se déduisent les unes des autres, suivant une loi déterminée. Ces quantités sont les *termes* de la série.

Lorsque la somme des termes de la série tend vers une limite finie et déterminée, on dit que la série est *convergente*. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *divergente*.

Nous désignerons les termes successifs d'une série par

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots$$

et par S_n la somme des n premiers termes :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{n-1}.$$

Si la somme des n premiers termes tend vers une limite finie S, lorsqu'on prend un nombre de termes de plus en

plus grand, la série est convergente; sinon, elle est divergente.

Il importe de bien préciser la définition des séries convergentes. Quand on dit que la somme des termes de la série tend vers une limite finie et déterminée S, cela signifie que l'on peut prendre n assez grand pour que la somme S_n des n premiers termes, et chacune des sommes suivantes S_{n+1}, S_{n+2}, ..., diffère de la limite S d'une quantité moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit.

La progression géométrique, prolongée à l'infini, nous donne un premier exemple de série. Soit a le premier terme, r la raison; la série s'écrit

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots\ldots$$

La loi de formation da la série est très-simple; on déduit chaque terme du précédent en le multipliant par un nombre constant r.

Si la raison r, en valeur absolue, est plus grande que l'unité, les termes de la série vont en augmentant indéfiniment; il est clair que, dans ce cas, la somme des termes ne peut tendre vers une limite déterminée; la série est divergente.

Si la raison, en valeur absolue, est plus petite que l'unité, les termes de la série diminuent indéfiniment, de manière à devenir plus petits que toute quantité donnée. Nous avons trouvé pour la somme des n premiers termes (Ire partie, livre IV, chap. II),

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand,

la quantité $\frac{ar^n}{1-r}$ devenant plus petite que toute quantité donnée, on voit que la somme des termes tend vers une limite finie et déterminée,

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Ainsi, dans ce cas, la série est convergente; cette limite $\frac{a}{1-r}$ est ce que l'on appelle la somme des termes de la série.

Quand la raison r est positive, ainsi que le premier terme a, tous les termes étant positifs, la somme des termes va constamment en augmentant, à mesure qu'on en prend un nombre plus grand, et elle se rapproche de plus en plus de la limite S. Quand la raison est négative, la somme est alternativement plus grande et plus petite que la limite S, dont elle se rapproche en oscillant de part et d'autre.

54. Une première condition nécessaire pour qu'une série soit convergente, c'est que ses termes tendent vers zéro. Nous ferons voir, en effet, que, dans toute série convergente, on peut prendre n assez grand pour que le terme u_n et chacun des termes suivants u_{n+1}. u_{n+2}..... soit plus petit qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit. Puisque la série est convergente, on peut prendre n assez grand pour que chacune des sommes

$$S_n, \; S_{n+1}, \; S_{n+2}, \ldots\ldots$$

diffère de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$. Les deux sommes S_n et S_{n+1}, différant de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, diffèrent entre elles d'une quantité moindre

que α ; mais la différence de ces deux sommes est le terme u_n de la série ; on en conclut que ce terme u_n est plus petit que α. De même, les deux sommes S_{n+1} et S_{n+2}, différant de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, leur différence, c'est-à-dire le terme u_{n+1} de la série, est moindre que α, et ainsi de suite. Ainsi chacun des termes

$$u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ \ldots\ldots$$

est moindre que la quantité donnée α, ce qu'on exprime en disant que les termes de la série tendent vers zéro.

C'est ce qui a lieu dans la progression géométique décroissante ; ses termes deviennent en effet plus petits que toute quantité donnée.

55. Mais cette condition n'est pas suffisante ; les termes d'une série peuvent tendre vers zéro sans que la série soit convergente. Un exemple très-simple mettra cette proposition en évidence. Considérons la série

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

formée de fractions ayant pour numérateurs l'unité, et pour dénominateurs les nombres entiers consécutifs ; le terme général $\frac{1}{n}$ tend vers zéro, et cependant la série est divergente.

Prenons, en effet, le troisième et le quatrième terme

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4},$$

et remplaçons $\frac{1}{3}$ par la quantité plus petite $\frac{1}{4}$, nous aurons

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4},$$

plus simplement

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{2}.$$

Prenons maintenant les quatre termes suivants

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},$$

et remplaçons chacun des trois premiers par la quantité plus petite $\frac{1}{8}$, nous aurons

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

En prenant de même les huit termes suivants, et remplaçant chacun d'eux par $\frac{1}{16}$, on aurait

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\cdots\cdots+\frac{1}{16}>\frac{8}{16}=\frac{1}{2},$$

et ainsi de suite indéfiniment. Nous formons ainsi une infinité de groupes dont chacun est plus grand que $\frac{1}{2}$; donc la somme des termes augmente au delà de toute limite, et par conséquent la série est divergente.

56. Quand nous disons que les termes d'une série convergente tendent vers zéro, cela ne signifie pas qu'ils diminuent continuellement, de manière que chacun d'eux soit plus petit que le précédent. Écrivons, par exemple, la progression décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots$$

dans l'ordre suivant

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\dots\dots$$

la série reste évidemment convergente; les termes tendent vers zéro, mais avec des alternatives de croissance et de décroissance.

Après ces considérations préliminaires, nous distinguerons deux sortes de séries, celles dont tous les termes sont positifs, et celles dont les termes sont, les uns positifs, les autres négatifs.

Séries dont tous les termes sont positifs.

57. Théorème I. *Une série dont tous les termes sont positifs, et dont la somme des* n *premiers termes conserve une valeur finie, quand* n *augmente indéfiniment, est convergente.*

On dit qu'une grandeur variable conserve une valeur finie, lorsqu'elle reste constamment inférieure à une grandeur déterminée A que l'on peut assigner. Puisque les termes de la série proposée sont tous positifs, la somme des n premiers termes va en augmentant à mesure que n augmente. Si elle conserve une valeur finie, la somme croissante tend évidemment vers une certaine limite qu'elle ne peut dépasser; cette limite est la plus petite des quantités auxquelles la somme variable reste constamment inférieure. Donc la série est convergente.

58. *Remarque.* Ce théorème doit être borné aux séries dont tous les termes sont positifs; lorsque les termes sont affectés de signes différents, de ce que la somme conserve une valeur finie, on ne peut plus conclure la convergence de la série. Soit, par exemple, la série

$$1-1+1-1+\dots\dots;$$

si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la somme est alternativement 1 et 0 ; quoique restant finie, elle ne tend pas vers une limite déterminée et la série est divergente.

Ceci fait voir qu'une série peut être divergente de deux manières ; soit que la somme des n premiers termes augmente à l'infini, soit que la somme, conservant une valeur finie, ne tende pas vers une limite déterminée. Dans les séries dont tous les termes sont positifs, le premier mode de divergence se présente seul, puisque la série est convergente, toutes les fois que la somme reste finie ; mais, dans les séries dont les termes sont affectés de signes différents, les deux modes de divergence peuvent se présenter suivant les cas.

59. Théorème II. *Lorsqu'une série a tous ses termes positifs et respectivement moindres que les termes correspondants d'une série convergente, dont tous les termes sont positifs, cette première série est aussi convergente.*

Il est clair en effet que la somme des n premiers termes de la première série est moindre que la somme des n premiers termes de la seconde série ; mais cette seconde somme conserve une valeur finie, puisque la seconde série est convergente ; la première somme conserve donc à plus forte raison une valeur finie et, en vertu du théorème précédent, la première série est convergente,

Ce théorème nous indique le moyen que l'on emploie pour reconnaître si une série est convergente ; on compare la série proposée à une autre déjà connue et que l'on sait être convergente. La progression géométrique décroissante étant la seule série convergente que nous connaissions jusqu'à présent, c'est aux progressions géométriques que nous comparerons les séries.

60. **Théorème III.** ***Lorsqu'à partir d'un certain rang le rapport d'un terme au précédent est constamment égal ou inférieur à un nombre déterminé plus petit que l'unité, la série est convergente.***

Supposons qu'à partir du terme de rang n le rapport d'un terme au précédent reste constamment égal ou inférieur à un nombre déterminé k plus petit que l'unité; je dis que la série est convergente. Faisons abstraction des n premiers termes dont la somme a une valeur finie et bien déterminée, et considérons la série

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots$$

formée par les termes suivants.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k,$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < k,$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < k,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

De la première inégalité on déduit

$$u_{n+1} < ku_n.$$

La seconde donne

$$u_{n+2} < ku_{n+1},$$

et, si l'on remplace le terme u_{n+1} par la quantité plus grande ku_n, on a *à fortiori*

$$u_{n+2} < k^2u_n.$$

On déduit de même de la troisième

$$u_{n+3} < ku_{n+2},$$

et, en remplaçant u_{n+2} par la quantité plus grande k^2u_n,

$$u_{n+3} < k^3u_n,$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que les termes de la série

$$(1) \qquad u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots$$

sont respectivement moindres que les termes correspondants de la progression géométrique décroissante

$$(2) \qquad u_n + ku_n + k^2u_n + \ldots\ldots$$

dont la raison k est inférieure à l'unité. En vertu du théorème précédent, on en conclut que la série est convergente.

Soit, par exemple, la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Le rapport du second terme au premier est $\frac{1}{2}$, du troisième au second $\frac{1}{3}$, du quatrième au troisième $\frac{1}{4}$, et ainsi de suite; ce rapport étant constamment égal ou inférieur à $\frac{1}{2}$, la série est convergente.

Quand on prend les n premiers termes de la série proposée et qu'on néglige les suivants, l'erreur commise, ou la limite de la somme des termes de la série (1) est moindre que la limite de la somme des termes de la progression (2), c'est-à-dire moindre que $\frac{u_n}{1-k}$.

61. *Corollaire.* On facilite beaucoup l'application de ce théorème par les considérations suivantes. Ordinairement

le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'un terme au précédent tend vers une limite déterminée, que nous désignerons par λ, lorsque n augmente indéfiniment. Il y a trois cas à distinguer, suivant que cette limite λ du rapport est inférieure, supérieure, ou égale à l'unité.

1° $\lambda < 1$. Choisissons un nombre arbitraire mais déterminé k, compris entre 1 et λ, c'est-à-dire plus petit que l'unité, mais plus grand que k. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se rapprochant indéfiniment de sa limite λ, restera, à partir d'un certain rang, constamment inférieur au nombre k; donc, en vertu du théorème démontré, la série est convergente.

2° $\lambda > 1$. Choisissons un nombre arbitraire k entre 1 et λ. Le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se rapprochant indéfiniment de sa limite λ, restera, à partir d'un certain rang, constamment supérieur à k, et l'on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > k, \quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} > k, \quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} > k, \quad \ldots\ldots$$

On en déduit

$$u_{n+1} > k u_n, \quad u_{n+2} > k^2 u_n, \quad u_{n+3} > k^3 u_n, \quad \ldots\ldots$$

Les termes de la série, étant plus grands que les termes d'une progression géométrique croissante, augmentent à l'infini. Donc la série est divergente.

3° $\lambda = 1$. Quand le rapport d'un terme au précédent tend vers une limite égale à l'unité, il y a ambiguïté : la série est tantôt convergente, tantôt divergente. Le théorème précédent est insuffisant pour décider la convergence de la série; il faut alors recourir à des moyens particuliers.

Exemples.

1° Soit la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

dont le terme de rang n est

$$\frac{x^n}{1.2.3\ldots\ldots n};$$

le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{x}{n};$$

ce rapport a pour limite zéro, quand n augmente indéfiniment; donc la série est convergente, quelle que soit la valeur de x.

Quand la valeur de x est plus grande que l'unité, les termes commencent par augmenter; mais, à partir d'un certain rang plus ou moins éloigné, ils vont en diminuant. Par exemple, si $x=10+\frac{1}{2}$, les termes augmentent jusqu'au dixième terme; mais au delà, le rapport devenant plus petit que l'unité, les termes diminuent. A partir du vingtième terme, les termes décroissent plus rapidement que les termes d'une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{2}$.

2° Considérons la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots,$$

qui a pour terme général

$$\frac{x^n}{n}.$$

Le rapport de ce terme au précédent est

$$\frac{n-1}{n}x \quad \text{ou} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)x;$$

et a pour limite x, quand n augmente indéfiniment. Ainsi, la série est convergente, quand la valeur de x est plus petite que l'unité; divergente, quand elle est plus grande que l'unité.

Quand $x = 1$, on a la série divergente étudiée au nº 55.

3º Soit la série

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

a pour limite l'unité, et la question de convergence reste indécise. Mais on peut démontrer aisément que la série est convergente, en groupant les termes d'une manière analogue à celle que nous avons employée dans l'exemple du nº 55. Prenons d'abord le second et le troisième termes, et remplaçons le troisième $\frac{1}{3^2}$ par une quantité plus grande $\frac{1}{2^2}$, nous aurons

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}.$$

Formons un second groupe avec les quatre termes suivants et remplaçons chacun d'eux par une quantité plus grande $\frac{1}{4^2}$, nous aurons de même

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<\frac{4}{4^2}=\frac{1}{4}.$$

On formera le troisième groupe avec les huit termes suivants, en remplaçant chacun par le premier d'entre eux, ce qui donne

$$\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}\cdots\cdots+\frac{1}{15^2}<\frac{8}{8^2}=\frac{1}{8},$$

et ainsi de suite indéfiniment. On voit par là que la somme des termes de la série est plus petite que la somme des termes de la progression décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

Donc la série est convergente.

3° Soit la série

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots$$

Les termes de cette série étant respectivement plus grands que ceux de la série divergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots,$$

la somme augmente à l'infini, et la série est divergente.

62. *Remarques.* Le rapport d'un terme au précédent ne tend pas toujours vers une limite déterminée. Considérons,

par exemple, la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2^2.3}+\frac{1}{2^2.3^2}+\frac{1}{2^3.3^2}+\frac{1}{2^3.3^3}+\ldots\ldots;$$

le rapport d'un terme au précédent est ici alternativement $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$; il ne tend pas vers une limite déterminée; mais, comme il ne surpasse pas la quantité $\frac{1}{2}$ qui est plus petite que l'unité, la série est convergente.

Il n'est pas nécessaire pour la convergence des séries qu'à partir d'un certain rang le rapport d'un terme au précédent reste constamment inférieur à un nombre fixe plus petit que l'unité. Prenons comme exemple la progression décroissante

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots,$$

dont nous permutons les termes deux à deux, ce qui donne la série

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent est ici alternativement 2 et $\frac{1}{8}$; il ne reste pas, à partir d'un certain rang, inférieur à une quantité moindre que l'unité, et cependant la série est convergente.

63. Théorème IV. *Lorsqu'à partir d'un certain rang l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ a une valeur constamment égale ou inférieure à un nombre déterminé plus petit que l'unité, la série est convergente.*

Supposons qu'à partir d'un certain rang l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ reste constamment égale ou inférieure à un nombre déterminé k plus petit que l'unité, on aura

$$\sqrt[n]{u_n} < k,$$

et par suite

$$u_n < k^n.$$

Les termes de la série sont respectivement moindres que les termes de la progression géométrique décroissante

$$k^n,\ k^{n+1},\ k^{n+2}.\ \ldots.$$

et, par conséquent, la série est convergente.

Corollaire. On applique ce théorème comme le précédent. Ordinairement l'expression $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite déterminée λ, quand n augmente indéfiniment. Si la limite λ est inférieure à l'unité, la série est convergente; si elle est supérieure à l'unité, la série est divergente; si elle est égale à l'unité, il y a ambiguïté.

Il est aisé de reconnaître que les limites des deux expressions $\frac{u^{n+1}}{u_n}$ et $\sqrt[n]{u_n}$ sont égales. Appelons en effet λ et λ_1 ces deux limites et supposons λ_1 plus petite que λ_1. Si l'on considère la série

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots..,$$

les limites pour cette série seront λx et $\lambda_1 x$; en vertu des théorèmes précédents, la série sera convergente pour toutes les valeurs de x inférieures à $\frac{1}{\lambda}$ et divergente pour toutes les valeurs de x supérieures à $\frac{1}{\lambda_1}$; elle serait en même temps convergente et divergente pour les valeurs

de x comprises entre $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda}$. Il faut donc que les deux quantités λ et λ_1 soient égales.

Séries dont les termes sont affectés de signes différents.

64. THÉORÈME V. *Lorsqu'une série dont tous les termes sont positifs est convergente, si l'on affecte les termes de signes quelconques, la série reste convergente.*

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des séries dont tous les termes sont positifs. Quand les termes sont affectés de signes différents, on examine si la série que l'on obtient en prenant tous les termes positivement est convergente; alors on peut affirmer que la série proposée est aussi convergente. Parmi les n premiers termes de la série proposée, les uns sont positifs, les autres négatifs; appelons P_n la somme des termes positifs, Q_n celle des termes négatifs; nous aurons

$$S_n = P_n - Q_n.$$

Mais, si l'on prend tous les termes avec le signe $+$, la somme des n premiers termes devient égale à $P_n + Q_n$; cette somme totale conservant une valeur finie, les sommes partielles P_n et Q_n conservent aussi des valeurs finies et tendent vers des limites déterminées P et Q; il est clair que leur différence S_n tend vers une limite égale à $P - Q$. Donc la série proposée est convergente.

Corollaire. Le théorème III peut être étendu aux séries dont les termes sont affectés de signes quelconques. Si, à partir d'un certain rang, la valeur absolue du rapport d'un terme au précédent reste constamment inférieure à un nombre déterminé moindre que l'unité, la série est convergente. Et, en effet, nous savons que, dans ce cas, la série

formée de tous les termes pris positivement est convergente; donc la série proposée est elle-même convergente.

Séries à termes alternativement positifs et négatifs.

65. Théorème VI. *Lorsque les termes d'une série décroissent indéfiniment et sont alternativement positifs et négatifs, la série est convergente.*

Parmi les séries dont les termes sont affectés de signes différents, il faut remarquer en particulier celles dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. Soit

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots\ldots$$

une série de cette sorte; lorsque les termes tendent vers zéro et en outre diminuent continuellement, de manière que chacun soit plus petit que le précédent, on peut affirmer la convergence de la série.

Si l'on prend un, deux, trois, quatre,..... termes, on obtient les sommes successives

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0, \\ S_2 &= u_0 - u_1, \\ S_3 &= u_0 - u_1 + u_2, \\ S_4 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Considérons d'abord les sommes composées d'un nombre pair de termes; on peut les écrire sous la forme

$$\begin{aligned} S_2 &= (u_0 - u_1), \\ S_4 &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3), \\ S_6 &= (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en groupant les termes deux à deux par des parenthèses:

un terme quelconque étant plus petit que le précédent, chacune des parenthèses a une valeur positive ; ces diverses sommes ont donc des valeurs positives de plus en plus grandes.

Considérons maintenant les sommes composées d'un nombre impair de termes ; elles ont aussi des valeurs positives ; car on a

$$S_3 = S_2 + u_2, \quad S_5 = S_4 + u_4, \ldots\ldots$$

Si on les écrit sous la forme suivante

$$S_1 = u_0,$$
$$S_3 = u_0 - (u_1 - u_2),$$
$$S_5 = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on voit qu'elles vont en diminuant de plus en plus. On a ainsi deux séries de sommes, qui vont, les premières en augmentant, les secondes en diminuant.

Chaque somme de la seconde série est plus grande que l'une quelconque de celles de la première série ; comparons par exemple les sommes S_{13} et S_8, on a $S_{13} = S_{12} + u_{12}$; la somme S_{13} est plus grande que S_{12} ; cette dernière étant plus grande que S_8, on en conclut que la somme S_{13} est plus grande que S_8. Comparons de même les sommes S_{13} et S_{16} ; on a $S_{17} = S_{16} + u_{16}$; la somme S_{17} est plus grande que S_{16} ; la somme S_{13}, étant plus grande que S_{17}, est elle-même plus grande que S_{16}.

Les sommes formées d'un nombre pair de termes, allant en augmentant et restant inférieures à l'une quelconque des sommes de la seconde série, tendent vers une limite déterminée. Les sommes formées d'un nombre impair de termes, allant en diminuant et restant supérieures à l'une

quelconque des sommes de la première série, tendent aussi vers une limite. La différence entre deux sommes consécutives S_n, S_{n+1}, ou le terme u_n de la série, devenant aussi petit qu'on veut, on en conclut que les deux limites sont les mêmes ; donc la série est convergente.

Les sommes successives, formées d'un nombre de termes de plus en plus grand, sont alternativement trop grandes et trop petites, et tendent vers la limite en oscillant en quelque sorte de part et d'autre.

La limite S étant toujours comprise entre deux sommes consécutives S_n et S_{n+1}, la différence entre la somme S_n et la limite S est moindre que la différence entre les deux sommes consécutives S_n et S_{n+1}, c'est-à-dire moindre que le terme u_n. Ainsi, quand on prend les n premiers termes de la série, l'erreur commise est moindre que le terme suivant u_n; la somme des termes négligés est une fraction de ce terme $\pm u_n$ et a même signe que ce terme.

Exemples.

1° La série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

dont les signes sont alternés, et dont les termes diminuent indéfiniment est convergente. Les sommes

$$1$$

$$1-\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=0{,}8333$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=0{,}5833$$

. . . .

sont alternativement trop grandes et trop petites. Mais la série converge très-lentement; car si l'on prend les dix premiers termes, l'erreur étant moindre que le terme suivant ou que $\frac{1}{11}$, on n'a qu'un chiffre décimal exact; si l'on prend les cent premiers termes, on a une approximation de $\frac{1}{101}$, ou deux chiffres exacts, etc.

Nous avons vu (n° 64) que, lorsque les termes d'une série sont affectés de signes différents, si la série que l'on obtient en prenant tous les termes positivement est convergente, la série proposée est aussi convergente. Mais cette condition n'est pas nécessaire. Ainsi la série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

est convergente, tandis que la série

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots,$$

formée des mêmes termes pris positivement, n'est pas convergente.

2° La série

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\ldots,$$

converge beaucoup plus rapidement.

Si l'on prend les dix premiers termes, l'erreur commise étant moindre que le terme suivant

$$\frac{1}{1.2\ldots\ldots 12}=0,000000003;$$

on a la somme par défaut avec huit décimales exactes.

Théorème général.

66. Tous les théorèmes que nous avons démontrés sur la

convergence des séries sont compris dans un théorème général qu'il est bon de connaître.

THÉORÈME VII. *Pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire et il suffit que l'on puisse rendre* n *assez grand pour que la somme d'un nombre quelconque de termes, même infini, à la suite des* n *premiers, soit moindre qu'une quantité donnée.*

Soit la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots$$

Nous avons désigné par S_n la somme des n premiers termes,

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{n-1};$$

prenons à la suite un nombre quelconque m de termes et appelons s leur somme

$$s = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \ldots\ldots + u_{n+m-1};$$

en ajoutant cette somme s à la première somme S_n, nous obtiendrons la somme S_{n+m} des $n + m$ premiers termes de la série. Or, si la série est convergente, on peut prendre n assez grand pour que la somme S_n et la somme S_{n+m} diffèrent de la limite S d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$, et par conséquent diffèrent entre elles d'une quantité moindre que α; la somme s des m termes pris à la suite des n premiers est donc moindre que α, et cela est vrai si grand que soit m. Ainsi, dans une série convergente, on peut prendre n assez grand pour qu'un nombre quelconque de termes, même infini, pris à la suite des n premiers, aient une somme moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit.

La réciproque est vraie : lorsque cette condition est remplie, la série est convergente. En effet, prenons n tel que

la somme d'un nombre quelconque de termes à la suite des n premiers soit moindre que α en valeur absolue; il est clair que toutes les sommes

$$S_{n+1},\ S_{n+2},\ S_{n+3},\ \ldots\ldots,$$

qui se composent des n premiers termes, plus un, deux, trois, ..., termes à la suite, seront comprises entre $S_n - \alpha$ et $S_n + \alpha$. Prenons maintenant un nombre plus grand n', tel que la somme d'un nombre quelconque de termes à la suite des n' premiers soit moindre que la quantité α' plus petite que α; les sommes

$$S_{n'+1},\ S_{n'+2},\ S_{n'+3},\ \ldots\ldots$$

seront de même comprises entre $S_{n'} - \alpha'$ et $S_{n'} + \alpha'$. En général, la quantité $S_{n'} - \alpha'$ sera plus grande que $S_n - \alpha$, la quantité $S_{n'} + \alpha'$ plus petite que $S_n + \alpha$, et l'on aura ainsi resserré l'intervalle qui comprend toutes les sommes suivantes. On pourra encore le resserrer davantage et autant qu'on voudra, ce qui montre bien clairement l'existence de limite vers laquelle tend la somme des termes de la série.

Il pourrait arriver cependant que la quantité $S_{n'} + \alpha'$ fût plus grande que $S_n + \alpha$; mais, comme on sait que les sommes $S_{n'+1}$, $S_{n'+2}$, ... sont plus petites que $S_n + \alpha$, on conserverait cette dernière quantité et l'on dirait que les sommes sont comprises entre $S_{n'} - \alpha'$ et $S_n + \alpha$. Il pourrait arriver de même que la quantité $S_{n'} - \alpha'$ fût plus petite que $S_n - \alpha$: dans ce cas, on dirait que les sommes sont comprises entre $S_n - \alpha$ et $S_{n'} + \alpha'$. Dans tous les cas, on aura formé, dans le premier intervalle 2α, un second intervalle $2\alpha'$ plus petit que le premier et comprenant toutes les sommes suivantes. Dans le second, on en formera un troisième encore plus petit, et ainsi de suite, ce qui conduit nécessairement à une limite.

CHAPITRE II.

DU NOMBRE *e*.

67. Considérons la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

Les deux premiers termes donnent une somme égale à 2. Les termes suivants sont respectivement moindres que les termes de la progression géométrique

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$$

que l'on obtient en remplaçant chacun des facteurs, 3, 4, 5....... par un facteur plus petit 2, ce qui augmente les fractions; ainsi, d'après le théorème II, la série est convergente, et la somme des n premiers termes, abstraction faite des deux premiers, tend vers une limite moindre que la limite de la somme des termes de la progression, c'est-à-dire moindre que l'unité. La somme totale tend vers une limite comprise entre 2 et 3.

Cette limite est un nombre incommensurable. Supposons, en effet, qu'elle soit égale à une fraction ordinaire $\frac{m}{n}$, on aurait

$$\frac{m}{n}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots$$

Si nous écrivons d'abord les $n+1$ premiers termes, et si nous mettons les suivants sous la forme

$$\frac{1}{1.2.3\ldots\ldots n}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots\right],$$

nous aurons

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots\ldots n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right].$$

Multiplions ensuite tous les termes de l'égalité par le produit $1 . 2 . 3 \ldots\ldots n$, le premier membre devient un nombre entier $1 . 2 . 3 \ldots\ldots (n-1)\, m$; les $n+1$ premiers termes du second membre deviennent aussi des nombres entiers, dont, pour abréger, nous désignerons la somme par N; on obtient de la sorte l'égalité

$$1.2\ldots\ldots(n-1)m = \mathrm{N} + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right].$$

La quantité entre parenthèse est une fraction moindre que l'unité; car ses termes sont respectivement moindres que ceux de la progression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\ldots$$

que l'on obtient en remplaçant chacun des facteurs $n+2$, $n+3, \ldots$ par le facteur plus petit $n+1$, ce qui augmente chacune des fractions; la somme des termes de cette progression étant égale à $\frac{1}{n}$, la quantité entre parenthèse est moindre que $\frac{1}{n}$; c'est donc une fraction proprement dite. On aurait donc, dans l'égalité précédente, un nombre entier égal à un nombre fractionnaire, ce qui est impossible. Ainsi, la limite vers laquelle tend la somme des termes de la série proposée est un nombre incommensurable compris entre 2 et 3; ce nombre joue un grand rôle en mathématiques; on le désigne par la lettre *e*.

68. Appelons R le reste de la série, ou l'erreur commise quand on prend les $n+1$ premiers termes,

$$R = \frac{1}{1.2.\ldots.n}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right];$$

la parenthèse étant moindre que $\frac{1}{n}$, d'après ce qui vient d'être dit, on a

$$R < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1.2.3.\ldots.n}.$$

Ainsi, quand on prend $n+1$ termes, l'erreur commise est moindre que la n^e partie du dernier terme calculé.

Voici le calcul de e avec sept chiffres décimaux.

$$\begin{array}{rl}
 & 2 \\
\frac{1}{1.2} & = 0,5 \\
\frac{1}{1.2.3} & = 0,1666\ 6667 \\
\frac{1}{1.2.3.4} & = 0,0416\ 6667 \\
\frac{1}{1.2.\ldots.5} & = 0,0083\ 3333 \\
\frac{1}{1.2.\ldots.6} & = 0,0013\ 8889 \\
\frac{1}{1.2.\ldots.7} & = 0,0001\ 9841 \\
\frac{1}{1.2.\ldots.8} & = 0,0000\ 2480 \\
\frac{1}{1.2.\ldots.9} & = 0,0000\ 0276 \\
\frac{1}{1.2.\ldots.10} & = 0,0000\ 0028 \\
\frac{1}{1.2.\ldots.11} & = 0,0000\ 0003 \\
\hline
 & 2,7182\ 8184
\end{array}$$

Les termes se déduisent les uns des autres par divisions successives. Nous avons pris les douze premiers termes; les trois premiers sont exacts, et nous avons calculé les autres avec huit décimales, par défaut ou par excès, de manière que l'erreur commise sur chacun d'eux soit moindre qu'une demi-unité du huitième ordre décimal; six ont été calculées par excès, trois par défaut. D'ailleurs la somme des termes négligés est moindre que la 11ᵉ partie du dernier terme calculé, et par conséquent moindre aussi qu'une demi-unité du huitième ordre décimal. Pour corriger la somme obtenue, il faudrait donc la diminuer d'une quantité plus petite que 3 unités du huitième ordre décimal, et l'augmenter d'une quantité plus petite que deux unités du même ordre, ce qui donne

$$e > 2,7182\,8181$$
$$e < 2,7182\,8186;$$

On a ainsi, par défaut, avec sept décimales exactes,

$$e = 2,7182\,818.$$

Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, *quand* m *augmente indéfiniment.*

69. Nous démontrerons d'abord deux lemmes qui nous serviront dans la question proposée.

Lemme I. *La limite de la somme d'un nombre fini de grandeurs variables est égale à la somme de leurs limites.* Soient A, B, C,..... L, m grandeurs variables qui tendent simultanément vers les limites a, b, c,.....l. Si l'on appelle α, β, γ,.....λ les différences des grandeurs proposées à leurs limites, on a

$$A = a + \alpha,$$
$$B = b + \beta,$$

$$C = c + \gamma,$$
$$\dots\dots$$
$$L = l + \lambda.$$

En additionnant ces égalités et désignant par S la somme des grandeurs variables et par s celle des limites, il vient

$$S = s + (\alpha + \beta + \gamma + \dots\dots + \lambda).$$

Appelons p la plus grande des différences $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ en valeur absolue; leur somme sera moindre que mp. Or le nombre m restant fini, et la quantité p devenant plus petite que toute quantité donnée, puisque toutes les différences tendent vers zéro, le produit mp deviendra aussi plus petit que toute quantité donnée; donc la somme S tend vers la limite s.

70. Lemme II. *La limite du produit d'un nombre fini de facteurs variables est égal au produit de leurs limites.*

En conservant les mêmes notations que précédemment, nous avons les différences

$$A - a = \alpha,$$
$$B - b = \beta,$$
$$C - c = \gamma,$$
$$\dots\dots$$
$$L - l = \lambda,$$

Multiplions les deux membres de la première égalité par $BC\dots L$, ceux de la seconde par $aC\dots L$, la troisième par $abD\dots L, \dots$, enfin de la dernière par $bc\dots k$, ce qui donne

$$ABC\dots L - aBC\dots L = \alpha BC\dots L,$$
$$aBC\dots L - abC\dots L = \beta aC\dots L,$$

$$abC\ldots\ldots L - abcD\ldots\ldots L = \gamma abD\ldots\ldots L,$$

. . . .

. . . .

$$abc\ldots\ldots kL - abc\ldots\ldots kl = \lambda ab\ldots\ldots k.$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, on voit que les quantités intermédiaires se détruisent; il vient

$$ABC\ldots\ldots L - abc\ldots\ldots l = \alpha BC\ldots\ldots L + \beta aC\ldots\ldots L + \ldots\ldots$$

Chacun des produits $BC\ldots\ldots L$, $aC\ldots\ldots L,\ldots\ldots$, conservant une valeur finie, on voit que le second membre est la somme de m quantités qui tendent vers zéro; donc leur somme tend vers zéro, et le produit $ABC\ldots\ldots L$ a pour limite $abc\ldots\ldots l$.

Mais il est nécessaire, pour que ces propriétés subsistent, que le nombre des parties de la somme, ou le nombre des facteurs du produit, soit fini. Soit, par exemple, la somme des m quantités

$$\frac{a}{m} + \frac{a}{m} + \ldots\ldots + \frac{a}{m};$$

chacune d'elles tend vers zéro quand m augmente indéfiniment; mais le nombre des parties devenant infiniment grand, on ne peut plus dire que la limite de la somme soit la somme des limites, ce qui donnerait ici zéro; et en effet cette somme est égale à a.

De même l'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ désigne le produit de m facteurs égaux à $1 + \frac{1}{m}$; chacun de ces facteurs devient égal à l'unité quand m augmente indéfiniment; la limite du produit n'est pas égale au produit des limites, c'est-à-dire à l'unité, parce que le nombre des facteurs devient infini. C'est cette limite que nous nous proposons de déterminer.

71. Si l'on développe $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ par la formule du binôme, il vient

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{m}{1}\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{m^3}+ \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\frac{1}{m^n}+\ldots$$

Dans chaque terme l'exposant m est égal au nombre des facteurs du numérateur ; on divisera donc par cette puissance de m, en divisant par m chaque facteur du numérateur ; on ainsi

$$(1)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\ldots n}+\ldots$$

Nous remarquons d'abord que, quand m augmente, les facteurs $1-\frac{1}{m}$, $1-\frac{2}{m}$,....., qui composent les numérateurs des différents termes du développement, vont en croissant ; chaque terme augmente, ainsi que le nombre des termes ; on en conclut que la valeur de l'expression $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ augmente à mesure que m augmente. D'un autre côté, si l'on compare ce développement à la série connue (n° 67),

$$(2)\quad e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots$$

on voit que les termes du développement sont moindres

que les termes correspondants de la série, puisque les dénominateurs sont les mêmes de part et d'autre, et que les numérateurs des premiers sont inférieurs à l'unité ; la valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ est donc plus petite que la limite de la somme des termes de la série, c'est-à-dire plus petite que le nombre e. Ainsi, quand m augmente indéfiniment, la valeur de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ va sans cesse en croissant, tout en restant inférieure à e; elle tend donc vers une limite finie et déterminée qui ne peut surpasser le nombre e. Nous allons démontrer que cette limite est le nombre e lui-même.

Dans les deux expressions (1) et (2) prenons les $n+1$ premiers termes et considérons les deux sommes

$$A = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\dots\dots$$

$$\dots\dots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\dots\dots n},$$

$$E = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots\dots+\frac{1}{1.2.3\dots\dots n}.$$

Nous pouvons rendre n assez grand pour que la somme E diffère de sa limite e d'une quantité moindre qu'une quantité donnée $\frac{\alpha}{2}$. Ayant choisi le nombre n de cette manière, laissons-le fixe, et donnons à m des valeurs plus grandes que n et de plus en plus grandes. La somme A augmente; comme elle contient un nombre fini de termes, savoir $n+1$, la limite de cette somme, en vertu du lemme I, est égale à la somme des limites de ses différents termes. Le numéra-

teur du troisième terme a évidemment pour limite l'unité; de même celui du quatrième. En général, le numérateur d'un terme quelconque étant le produit d'un nombre fini de facteurs dont chacun se réduit à l'unité, a pour limite, en vertu du lemme II, le produit des limites de ces différents facteurs, c'est-à-dire l'unité. Ainsi, quand m augmente indéfiniment, la somme A tend vers une limite égale à la somme E. On conçoit donc que l'on puisse prendre m assez grand pour que la somme A diffère de sa limite E d'une quantité moindre que $\frac{\alpha}{2}$. On a alors

$$e - \mathrm{E} < \frac{\alpha}{2},$$

$$\mathrm{E} - \mathrm{A} < \frac{\alpha}{2},$$

et par suite, en ajoutant,

$$e - \mathrm{A} < \alpha.$$

La quantité $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ étant plus petite que e, mais plus grande que A, on a, à plus forte raison,

$$e - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^m < \alpha.$$

Puisque l'on peut rendre m assez grand pour que la valeur de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ diffère du nombre e d'une quantité moindre qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit, il est clair que ce nombre e est la limite vers laquelle tend la valeur de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quand m augmente indéfiniment.

72. L'expression $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers la même limite,

quand α tend vers zéro. Ceci est évident, si la quantité très-petite α est une fraction de la forme $\frac{1}{m}$, m étant un nombre entier très-grand ; car, dans ce cas, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ devient $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

En général la quantité très-petite α sera comprise entre deux fractions de la forme $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m+1}$, et l'on aura

$$\frac{1}{m+1} < \alpha < \frac{1}{m}.$$

L'exposant $\frac{1}{\alpha}$ très-grand sera alors compris entre les deux nombres entiers consécutifs m et $m+1$, de manière que l'on ait

$$m < \frac{1}{\alpha} < m+1.$$

Si dans l'expression proposée $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ on remplace la quantité $1+\alpha$ par la quantité plus grande $1+\frac{1}{m}$ et l'exposant $\frac{1}{\alpha}$ par l'exposant plus grand $m+1$, on augmente la valeur de l'expression, et l'on a

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Au contraire, si l'on remplace la quantité $1+\alpha$ par la quantité plus petite $1+\frac{1}{m+1}$ et l'exposant $\frac{1}{\alpha}$ par l'exposant plus petit m, on diminue la valeur de l'expression, et

l'on a

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m.$$

On obtient ainsi les inégalités

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

ou, par des transformations convenables,

$$\frac{\left(1+\dfrac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1+\dfrac{1}{m+1}} < (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \times \left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Lorsque la quantité α tend vers zéro, le nombre entier m augmente indéfiniment, chacune des quantités $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ tend vers la limite e; d'ailleurs le diviseur $1+\frac{1}{m+1}$, de même que le multiplicateur $1+\frac{1}{m}$, devient égal à l'unité. Les deux quantités extrêmes tendent ainsi vers la même limite e; donc la quantité $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, qui est comprise entre elles, tend aussi nécessairement vers cette même limite.

Nous avons supposé dans ce qui précède la quantité α positive, supposons-la maintenant négative; en mettant le signe en évidence, on a à considérer l'expression $(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$. La quantité $1-\alpha$ moindre que l'unité peut se mettre sous la forme $\frac{1}{1+\alpha'}$, α' étant une quantité positive. De l'égalité

$$1-\alpha = \frac{1}{1+\alpha'}$$

on déduit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1+\alpha'}{\alpha'} = 1 + \frac{1}{\alpha'},$$

et, en substituant,

$$(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\alpha')^{1+\frac{1}{\alpha'}} = (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha'}} \times (1+\alpha').$$

Quand α' tend vers zéro, la quantité $(1+\alpha')^{\frac{1}{\alpha'}}$ tend vers e, tandis que le multiplicateur $1+\alpha'$ tend vers l'unité ; donc la quantité $(1-\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite e.

Ainsi, quel que soit le signe de α, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers une limite égale à e, quand α tend vers zéro.

LIVRE IV.

DES LOGARITHMES.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE.

73. Lemme I. *Les puissances successives d'un nombre plus grand que l'unité vont en croissant et deviennent plus grandes que toute quantité donnée.*

Soit a une quantité positive supérieure à l'unité. On voit d'abord que ses puissances successives vont en croissant; car on obtient a^{m+1} en multipliant a^m par a; le multiplicateur a étant plus grand que l'unité, le produit a^{m+1} est plus grand que le multiplicande a^m. Je dis maintenant que les puissances de a augmentent au delà de toute limite. Posons $a = 1 + \alpha$; en développant $(1 + \alpha)^m$ suivant la loi du binôme, nous aurons

$$a^m = (1 + \alpha)^m = 1 + \frac{m}{1}\alpha + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha^2 + \ldots..$$

Tous les termes du développement sont positifs; si donc

on néglige le troisième terme et les termes suivants, on diminue le second membre, et l'on a

$$a^m > 1 + m\alpha.$$

Pour rendre la quantité a^m plus grande qu'une quantité donnée A, il suffit évidemment de rendre la quantité $1 + m\alpha$ plus grande que cette quantité ; on déterminera donc l'exposant m de manière à satisfaire à l'inégalité

$$1 + m\alpha > A;$$

d'où

$$m > \frac{A - 1}{\alpha}.$$

Ainsi, lorsque l'exposant m surpasse $\frac{A - 1}{\alpha}$, il est certain que la puissance a^m devient supérieure à la quantité A, si grande qu'elle soit. Donc les puissances successives du nombre a plus grand que l'unité augmentent à l'infini.

Soit, par exemple, $a = 1,1$; on peut affirmer que a^m surpassera 1000 si m est plus grand que $\frac{999}{0,1}$ ou que 9990. Mais on n'a pas ainsi les plus petites puissances de a supérieures à 1000.

74. Lemme II. *Les puissances successives d'un nombre plus petit que l'unité vont en décroissant et deviennent plus petites que toute quantité donnée*.

Le nombre a, étant inférieur à l'unité, peut être représenté par $\frac{1}{1 + \alpha}$, et l'on a

$$a^m = \frac{1}{(1 + \alpha)^m}.$$

Quand l'exposant m croît indéfiniment, le dénominateur augmentant indéfiniment, la fraction diminue et tend vers zéro.

75. LEMME III. *La racine d'un nombre supérieur à l'unité est supérieure à l'unité, et l'on peut prendre l'indice du radical assez grand pour que la racine diffère de l'unité d'une quantité moindre que toute quantité donnée.*

Soit a un nombre supérieur à l'unité. Je dis d'abord que $\sqrt[n]{a}$ surpasse l'unité; car un nombre plus petit que l'unité, élevé à la n^e puissance, ne pourrait reproduire le nombre a plus grand que l'unité. Nous voulons rendre $\sqrt[n]{a}$ inférieure à $1+\alpha$, α étant une quantité donnée très-petite; il s'agit donc de satisfaire à l'inégalité

$$\sqrt[n]{a} < 1+\alpha,$$

ou à la suivante

$$(1+\alpha)^n > a.$$

Or, en vertu du lemme I, si petite que soit α, on peut toujours prendre l'exposant n assez grand pour que $(1+\alpha)^n$ surpasse a.

On veut, par exemple, que $\sqrt[n]{2}$ diffère de l'unité de moins de 0,001. On prendra n plus grand que $\frac{2-1}{0,001}$, c'est-à-dire plus grand que 1000.

COROLLAIRE. *Toute puissance fractionnaire d'un nombre plus grand que l'unité est plus grande que l'unité.* Car $a^{\frac{m}{n}}$ signifie $\sqrt[n]{a^m}$; le nombre a étant supérieur à l'unité, sa puissance a^m est supérieure à l'unité, et la racine de cette dernière quantité est aussi supérieure à l'unité.

76. Lemme IV. *Les racines d'un nombre inférieur à l'unité sont inférieures à l'unité, et l'on peut prendre l'indice du radical assez grand pour que la racine diffère de l'unité d'une quantité moindre que toute quantité donnée.*

Si le nombre a est inférieur à l'unité, $\sqrt[n]{a}$ sera aussi inférieure à l'unité ; car un nombre supérieur à l'unité, élevé à la n^e puissance, ne pourrait reproduire le nombre a inférieur à l'unité ; d'autre part, le nombre a, inférieur à l'unité, peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité, et l'on a

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}}.$$

Le dénominateur tendant vers l'unité, quand l'indice n du radical augmente indéfiniment, la fraction tend elle-même vers l'unité.

Corollaire. *Toute puissance fractionnaire d'un nombre plus petit que l'unité est plus petite que l'unité.*

77. Théorème. *La fonction* a^x *varie d'une manière continue, quand* x *croît d'une manière continue.*

On appelle *fonction* en mathématiques une expression qui contient une lettre désignant une quantité variable. L'expression $2x^2 - 4x + 5$ est une fonction entière de la variable x. L'expression a^x est une fonction *exponentielle* de x; on la nomme ainsi parce que la variable x est en exposant.

Nous supposons le nombre a positif et plus grand que l'unité. Je dis d'abord que lorsque la variable x croît, la fonction a^x croît. En effet, si l'on donne à la variable x un accroissement h, la fonction devient a^{x+h}, et éprouve une

variation marquée par

$$a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

Mais a^h est supérieure à l'unité, parce que toute puissance d'un nombre a supérieur à l'unité est elle-même supérieure à l'unité ; donc la différence $a^{x+h} - a^x$ est positive, et par suite a^{x+h} est plus grande que a^x. Ainsi, quand a est plus grand que l'unité, la fonction a^x croît en même temps que la variable x.

Je dis maintenant que l'on peut donner à la variable x un accroissement h assez petit pour que la fonction a^x éprouve un accroissement plus petit qu'une quantité donnée α. En effet, supposons h plus petit qu'une fraction de la forme $\frac{1}{n}$, n étant un entier très-grand ; en vertu du lemme III, on peut prendre n assez grand pour que $a^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{a}$ diffère de l'unité d'une quantité plus petite que $\frac{\alpha}{a^x}$; la quantité a^h, étant moindre que $a^{\frac{1}{n}}$, puisque h est inférieure à $\frac{1}{n}$, différera de l'unité d'une quantité encore plus petite, et la différence $a^{x+h} - a^x$ sera moindre que $a^x \times \frac{\alpha}{a^x}$ ou que α. Ainsi l'accroissement de la fonction peut être rendu plus petit qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit ; en d'autres termes, lorsque l'accroissement de la variable tend vers zéro, celui de la fonction tend aussi vers zéro.

On dit qu'une grandeur varie d'une manière continue lorsqu'elle ne peut aller d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction est *continue* lorsqu'à une variation infiniment petite de la

variable correspond une variation infiniment petite de la fonction ; car si la fonction sautait brusquement d'une valeur à une autre, elle éprouverait une variation finie pour une variation infiniment petite de la variable.

Il résulte de ce qui précède que, lorsque la variable x croît d'une manière continue, la fonction exponentielle a^x croît aussi d'une manière continue.

Nous avons supposé le nombre positif a plus grand que l'unité. Supposons-le maintenant plus petit, et posons $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité. On a

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

Lorsque x croît d'une manière continue, a'^x croît, et par conséquent a^x décroît d'une manière continue.

78. Corollaire. Voyons maintenant les valeurs par lesquelles passe la fonction exponentielle a^x quand on fait croître x d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Supposons d'abord a supérieur à l'unité, et faisons croître x de o à $+\infty$; pour $x = 0$, on a $a^0 = 1$; quand x est infiniment grand, en vertu du lemme I, a^x est aussi infiniment grand; ainsi, quand x croît de o à $+\infty$, la fonction a^x croît de 1 à $+\infty$. Faisons maintenant décroître x de o à $-\infty$, et pour cela posons $x = -x'$, x' étant positive; on a

$$a^x = \frac{1}{a^{x'}};$$

quand x' croît de o à $+\infty$, $a^{x'}$ croît de 1 à $+\infty$, et par conséquent a^x décroît de 1 à o. En résumé, lorsque la valeur x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a étant supé-

rieur à l'unité, la fonction a^x croît d'une manière continue de o à $+\infty$. Il est à remarquer que la fonction passe par toutes les valeurs positives et qu'elle ne passe qu'une fois par chacune d'elles puisqu'elle va constamment en augmentant.

Considérons maintenant le cas où le nombre a est inférieur à l'unité, et posons $a = \frac{1}{a'}$, a' étant supérieur à l'unité, ce qui donne

$$a^x = \frac{1}{a'^x}.$$

On voit que lorsque x croît de o à $+\infty$, a'^x croissant de 1 à $+\infty$, a^x décroît de 1 à 0, et que, lorsque x décroît de o à $-\infty$, a'^x décroissant de 1 à 0, a^x croît de 1 à $+\infty$. Ainsi, quand x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, a étant inférieur à l'unité, la fonction a^x décroît d'une manière continue de $+\infty$ à 0. La fonction passe encore par toutes les valeurs positives et une seule fois par chacune d'elles.

79. Remarque. Nous pouvons maintenant donner d'une manière très-nette la signification de l'exposant incommensurable dont nous avons déjà dit quelques mots (nº 20). Soit $a^{\sqrt{2}}$, et, pour préciser, supposons a supérieur à l'unité; le nombre incommensurable $\sqrt{2}$ est la limite commune de deux nombres fractionnaires $\frac{m}{n}$ et $\frac{m+1}{n}$, qui diffèrent entre eux d'une quantité aussi petite qu'on veut, et dont les carrés comprennent 2; en remplaçant $\sqrt{2}$ par ces nombres approchés, on obtiendra deux séries de puissances fractionnaires $a^{\frac{m}{n}}$ et $a^{\frac{m+1}{n}}$, les premières plus petites

que les secondes, et telles que leur différence peut être rendue plus petite qu'une quantité donnée; il existe donc entre ces deux séries de grandeurs une grandeur déterminée qui en est la limite commune; c'est cette limite que désigne $a^{\sqrt{2}}$.

CHAPITRE II.

DES LOGARITHMES.

Définition par la fonction exponentielle.

80. On appelle *logarithme* d'un nombre l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever un nombre positif constant a pour reproduire le nombre proposé.

Nous avons vu que, lorsque x croît d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x passe par toutes les valeurs positives et ne passe qu'une fois par chacune d'elles; il en résulte que tous les nombres positifs ont des logarithmes, et que chacun d'eux n'a qu'un logarithme. Si le nombre constant a est supérieur à l'unité, les nombres plus grands que l'unité ont des logarithmes positifs, les nombres plus petits que l'unité des logarithmes négatifs. Si a était inférieur à l'unité, les nombres plus grands que l'unité auraient au contraire des logarithmes négatifs, les nombres plus petits que l'unité des logarithmes positifs. Les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes réels.

Nous désignerons le logarithme d'un nombre par la notation *log*.

Propriétés des logarithmes.

Les logarithmes jouissent de propriétés très-remarquables que nous allons démontrer.

81. Théorème I. *Le logarithme du produit de plusieurs facteurs égale la somme des logarithmes de ces facteurs.*

Soient deux nombres y et y', dont nous appellerons x et x' les logarithmes ; d'après la définition même des logarithmes, on a

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y'.$$

Multiplions ces deux égalités membre à membre, il vient

$$a^{x+x'} = yy'.$$

L'exposant $x + x'$ est le logarithme du produit yy' ; on a donc

$$\log(yy') = \log y + \log y'.$$

La même démonstration s'applique à un nombre quelconque de facteurs. Soient trois nombres y, y', y'', ayant pour logarithmes x, x', x'' ; on a de même

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y',$$
$$a^{x''} = y'',$$

et, en multipliant

$$a^{x+x'+x''} = yy'y'' ;$$

donc

$$\log(yy'y'') = \log y + \log y' + \log y''.$$

82. Théorème II. *Le logarithme d'un quotient égale le*

le logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.

En divisant membre à membre les deux égalités

$$a^x = y,$$
$$a^{x'} = y',$$

on a

$$a^{x-x'} = \frac{y}{y'}.$$

L'exposant $x - x'$ est le logarithme du quotient $\frac{y}{y'}$. Donc

$$\log \frac{y}{y'} = \log y - \log y'.$$

83. Théorème III. *Le logarithme de la puissance d'un nombre égale le logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

Si l'on élève à la m^e puissance (m étant un nombre quelconque, entier ou fractionnaire, positif ou négatif), les deux membres de l'égalité

$$a^x = y,$$

il vient

$$a^{mx} = y^m.$$

Donc

$$\log (y^m) = m \log y.$$

84. Théorème IV. *Le logarithme de la racine d'un nombre égale le logarithme de ce nombre, divisé par l'indice de la racine.*

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème précédent; car $\sqrt[n]{y}$ s'écrit $y^{\frac{1}{n}}$, et l'on a

$$\log \sqrt[n]{y} = \frac{\log y}{n}.$$

L'emploi des logarithmes simplifie beaucoup les calculs numériques; car la multiplication est remplacée par une addition, la division par une soustraction, l'élévation à une puissance par une multiplication, l'extraction d'une racine par une division.

Définition des logarithmes par des progressions.

85. Si l'on prend les logarithmes des termes d'une progression géométrique

$$a : ar : ar^2 : ar^3 : \ldots\ldots,$$

dont la raison est r, on forme évidemment une progression arithmétique

$$\log a \,.\, \log a + \log r \,.\, \log a + 2 \log r \,.\, \log a + 3 \log r \ldots\ldots$$

ayant pour raison $\log r$.

En arithmétique, on a coutume de définir les logarithmes par deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro,

$$1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots$$
$$0 \,.\, b \,.\, 2b \,.\, 3b \ldots\ldots$$

et l'on appelle logarithme d'un terme quelconque de la progression géométrique le terme correspondant de la progression arithmétique. Afin d'avoir les logarithmes de tous les nombres avec une grande approximation, on insère un grand nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression géométrique, et le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique. Il est aisé de voir que cette définition des logarithmes

par les progressions revient à la définition que nous avons donnée par les exponentielles.

Considérons les deux progressions

$$\begin{array}{l} 1 : a : a^2 : a^3 : \ldots\ldots \\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots \end{array}$$

Si l'on insère $n - 1$ moyens entre deux termes consécutifs des deux progressions, la raison de la progression géométrique devient $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$, celle de la progression arithmétique $\frac{1}{n}$, en sorte que les deux progressions ainsi développées s'écrivent

$$\begin{array}{l} 1 : a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{2}{n}} : a^{\frac{3}{n}} : \ldots\ldots a^{\frac{m}{n}} : \ldots\ldots \\ 0 \,.\, \frac{1}{n} \,.\, \frac{2}{n} \,.\, \frac{3}{n} \ldots\ldots \frac{m}{n} \ldots\ldots \end{array}$$

Sous cette forme, on voit qu'un nombre quelconque $a^{\frac{m}{n}}$ de la progression géométrique a pour logarithme l'exposant $\frac{m}{n}$ de la puissance à laquelle il faut élever le nombre constant a pour avoir le nombre proposé. La base a d'un système de logarithmes est le nombre qui a pour logarithme l'unité.

Changement de la base.

86. La base d'un système de logarithmes est un nombre positif constant, que l'on peut choisir à volonté. Supposons que l'on ait calculé les logarithmes des nombres dans le système dont la base est a, et que l'on veuille les calculer dans un autre système ayant pour base a'. Appelons x le

logarithme d'un nombre quelconque y dans le premier système, x' le logarithme du même nombre dans le second système, on aura

$$a^x = y, \quad a'^{x'} = y;$$

d'où

$$a^x = a'^{x'}.$$

Prenons les logarithmes des deux membres de cette égalité dans le premier système, en remarquant que le logarithme de a est l'unité, il vient

$$x = x' \log a',$$

d'où

$$x' = \frac{1}{\log a'} x.$$

Ainsi les logarithmes des mêmes nombres dans les deux systèmes sont proportionnels, et l'on a la règle suivante : *pour passer d'un système de logarithmes à un autre, il suffit de multiplier les logarithmes du premier système par l'inverse du logarithme de la nouvelle base pris dans le premier système.*

Logarithmes népériens.

87. Les logarithmes ont été inventés au commencement du XVIIe siècle par l'Écossais *Néper*, qui prit pour base le nombre incommensurable $e = 2,7182818\ldots\ldots$; les logarithmes de ce système ont été appelés logarithmes *hyperboliques*, ou, du nom de l'inventeur, logarithmes *népériens*. Ce sont ceux-là qui se présentent naturellement dans l'analyse mathématique; on les désigne ordinairement par la lettre L.

Mais les logarithmes népériens ne sont pas commodes pour les calculs numériques, parce qu'ils ne sont pas en harmonie avec notre numération décimale. C'est pourquoi *Briggs*, contemporain de Néper, proposa de remplacer la base e par la base *dix* de notre système de numération. Ce sont les logarithmes de Briggs dont on fait habituellement usage dans les calculs numériques; on les a nommés pour cette raison *logarithmes vulgaires;* nous les désignerons par le signe *log*.

On appelle *module* d'un système de logarithmes le nombre constant par lequel il faut multiplier les logarithmes népériens pour avoir les logarithmes du système considéré. Soit a la base d'un système de logarithmes; d'après ce qui a été dit précédemment, son module M sera

$$M = \frac{1}{La},$$

c'est-à-dire l'inverse du logarithme népérien de la base. Le module des logarithmes vulgaires est $M = 0,4342944819...$

Lorsqu'on passe d'un système dont la base est a à un système dont la base est a', le multiplicateur constant $\frac{1}{\log a'}$ s'appelle *module relatif* du premier système au second.

88. Il est bon de faire voir pourquoi Néper a choisi le nombre incommensurable e pour base de son système de logarithmes. Considérons les deux progressions

$$\begin{array}{l} 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : \dots\dots \\ 0 \;.\; \beta \;.\; 2\beta \;.\; 3\beta \;\dots\dots \end{array}$$

dans lesquelles α et β sont des quantités très-petites, afin

que les termes des deux progressions croissent par degrés très-petits, et que l'on ait ainsi les logarithmes de tous les nombres avec une grande approximation. Néper appelait module des logarithmes définis par ces deux progressions le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$, ou plutôt la limite de ce rapport, quand α et β tendent simultanément vers zéro, et il distinguait chaque système de logarithmes par son module. L'idée lui vint alors d'adopter le système dont le module est l'unité, celui qu'il regardait comme le plus simple. Si l'on fait $\beta = \alpha$, les deux progressions deviennent

$$1 : 1 + \alpha : (1 + \alpha)^2 : (1 + \alpha)^3 : \ldots\ldots$$
$$1 . \quad \alpha \quad . \quad 2\alpha \quad . \quad 3\alpha \quad \ldots\ldots$$

Telles sont les deux progressions par lesquelles Néper définissait son système de logarithmes. Calculons la base de ce système, c'est-à-dire le nombre qui a pour logarithme l'unité; soit $m\alpha$ le terme de la progression arithmétique qui est égal à l'unité, ou à peu près, le terme correspondant de la progression géométrique est $(1 + \alpha)^m$; puisque $m\alpha = 1$, on a $\alpha = \frac{1}{m}$ et $(1 + \alpha)^m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$; lorsque α tend vers zéro, m augmente indéfiniment, et le nombre $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ tend vers la limite e, qui est la base des logarithmes népériens.

Logarithmes vulgaires.

89. Dans un système quelconque les puissances de la base a^1, a^2, a^3..... ont évidemment pour logarithmes les nombres entiers 1, 2, 3..... Dans le système vulgaire, ce sont les puissances de 10, savoir 10, 100, 1000,..... qui

ont pour logarithmes les nombres entiers successifs. Les logarithmes ont été calculés en décimales; la partie entière d'un logarithme s'appelle *caractéristique*.

Les nombres plus petits que l'unité ont leurs logarithmes négatifs; les logarithmes négatifs étant incommodes dans la pratique, on leur substitue des logarithmes qui ont leur partie décimale positive et leur caractéristique seulement négative. Soit le nombre 0,03564 plus petit que l'unité; son logarithme est négatif et a pour valeur

$$-1,4480623.$$

Écrivons ce logarithme de la manière suivante

$$-2+1-0,4480623=-2+0,5519377,$$

ou plus simplement

$$\bar{2},5519377.$$

Sous cette forme, le logarithme a sa partie décimale positive; le signe —, placé au-dessus de la partie entière, indique que la caractéristique seule est négative. *La caractéristique négative du logarithme d'un nombre décimal plus petit que l'unité renferme un nombre d'unités marqué par le rang du premier chiffre significatif, à partir de la virgule.* En effet, soit m le rang du premier chiffre significatif à partir de la virgule dans le nombre proposé y; le produit $y \times 10^m$ étant compris entre 1 et 10, son logarithme a zéro pour caractéristique, avec une partie décimale positive; pour revenir au nombre y, il faut diviser par 10^m, c'est-à-dire retrancher m du logarithme; le logarithme de y aura donc une caractéristique négative $\bar{m}$, suivie d'une partie décimale positive.

Dans la première partie de cet ouvrage (livre IV, ch. 3),

nous avons expliqué l'usage des tables de Callet. Nous nous sommes occupés aussi des questions relatives aux intérêts composés et aux annuités. Nous y renvoyons le lecteur.

Résolution des équations exponentielles.

90. On appelle équation *exponentielle* une équation de la forme

$$a^x = b,$$

dans laquelle a et b sont deux quantités positives données, l'exposant x l'inconnue qui doit vérifier l'égalité. Il est facile de résoudre une semblable équation au moyen des logarithmes. Si l'on prend les logarithmes des deux membres de l'équation, on a

$$x \log a = \log b;$$

d'où

$$x = \frac{\log b}{\log a}.$$

On obtient ainsi la valeur de l'inconnue.

Exemples.

1°

$$7^x = 1254$$

$$x = \frac{\log 1254}{\log 7} = \frac{3,0982975}{0,8450980 4} = 3,666197.$$

2°

$$3^x = 0,462$$

$$x = \frac{\log 0,462}{\log 3} = -0,702878.$$

On peut encore résoudre des équations exponentielles plus compliquées que la précédente. Soit l'équation

$$a^{b^x} = c,$$

dans laquelle le premier membre signifie que le nombre a est élevé à une puissance marquée par b^x, les trois lettres a, b, c désignant d'ailleurs des nombres donnés positifs. En prenant les logarithmes des deux membres, on a

$$b^x \times \log a = \log c,$$

d'où

$$b^x = \frac{\log c}{\log a}.$$

On est ramené ainsi à l'exponentielle ordinaire. Pour que la question soit possible, il faut que a et c soient tous deux supérieurs ou tous deux inférieurs à l'unité, afin que le second membre ait une valeur positive. Si l'on prend une seconde fois les logarithmes, on a

$$x \log b = \log \log c - \log \log a;$$

d'où

$$x = \frac{\log \log c - \log \log a}{\log b}.$$

LIVRE V.

DÉRIVÉES.

CHAPITRE PREMIER.

DÉRIVÉES.

91. Lorsque deux quantités variables x et y sont liées l'une à l'autre, de telle sorte que la variation de l'une entraîne la variation de l'autre, on dit que ces deux quantités sont fonctions l'une de l'autre. Si l'on regarde y comme une fonction de x, on indique cette liaison par le symbole $y = f(x)$. Nous supposerons dans ce qui suit que, lorsque la variable x varie d'une manière continue entre certaines limites, la fonction y varie aussi d'une manière continue. A un accroissement très-petit h de la variable, correspond une variation ou accroissement très-petit k de la fonction. Quand le premier accroissement tend vers zéro, le second tend aussi vers zéro; en général, le rapport $\frac{k}{h}$ de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable tend vers une limite finie et déterminée. Cette limite est ce qu'on appelle la *dérivée* de la fonction propo-

sée. La dérivée est une nouvelle fonction de x que nous représentons par le symbole y' ou $f'(x)$.

Considérons, par exemple, la fonction $y=x^2$. Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, la fonction devient

$$(x+h)^2=x^2+2xh+h^2;$$

elle éprouve l'accroissement

$$k=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2.$$

On en déduit

$$\frac{k}{h}=2x+h.$$

Quand on fait tendre h vers zéro, le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable tend vers la limite $2x$. Telle est la dérivée de la fonction x^2. On écrira $y'=2x$.

92. Considérons encore la fonction plus générale $y=ax^m$, dans laquelle l'exposant m est entier et positif, et le coefficient a constant. Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, la fonction devient

$$a(x+h)^m=ax^m+\frac{m}{1}ax^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}ax^{m-2}h^2+\ldots\ldots+ah^m;$$

elle éprouve l'accroissement

$$k=a(x+h)^m-ax^m=max^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}ax^{m-2}h^2+\ldots\ldots+ah^m.$$

On en déduit

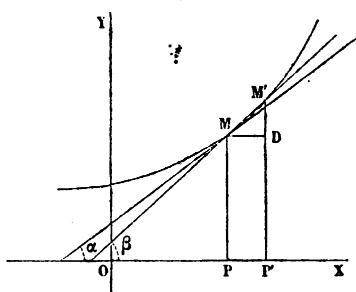
$$\frac{k}{h}=max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}ax^{m-2}h+\ldots\ldots+ah^{m-1}.$$

Quand on fait tendre h vers zéro, tous les termes du second

membre, à partir du second, tendent vers zéro. Comme ils sont en nombre fini, leur somme tend aussi vers zéro. Le rapport $\frac{k}{h}$ tend donc vers la limite max^{m-1}. Telle est la dérivée de la fonction ax^m ; on écrira $y' = max^{m-1}$. Ainsi, *on obtient la dérivée de la fonction* ax^m *en multipliant cette fonction par l'exposant de* x, *et diminuant ensuite l'exposant d'une unité.*

93. Ces exemples montrent bien l'existence de la dérivée. On peut ramener ce fait analytique à l'existence de la tangente à une courbe.

Soit $y = f(x)$ la fonction proposée. Traçons dans un plan deux droites fixes OX et OY, l'une horizontale, l'autre verticale ; à partir du point O portons sur la première une longueur OP égale à une valeur quelconque de la variable x, au point P élevons une perpendiculaire sur laquelle nous prendrons une longueur PM égale à la valeur correspondante de la fonction y, et opérons de même pour chaque valeur de x. La fonction étant continue, le lieu des points M ainsi obtenus formera une courbe qui représentera la marche de la fonction, Afin d'étendre ce mode de représentation à toutes les valeurs, on convient de porter les valeurs positives de x à droite du point O, les valeurs négatives à gauche ; et de même on porte la valeur de y sur la perpendiculaire, au-dessus si elle est positive, au-dessous si elle est négative.



Cela posé, donnons à x un accroissement PP' $= h$, la

fonction éprouvera un accroissement k représenté par la différence M'D entre les deux perpendiculaires ou *ordonnées* voisines MP et MP'. Traçons la sécante MM'; dans le triangle rectangle MM'D, le rapport $\frac{k}{h}$ est égal à la tangente de l'angle M'MD ou de l'angle β que fait cette sécante avec l'axe horizontal OX. Faisons maintenant diminuer l'accroissement h jusqu'à zéro, le point M' se rapprochera indéfiniment du point M; la sécante, tournant autour du point M, tendra en général vers une position limite MT qui est la tangente à la courbe au point M; l'angle β tendra vers l'angle α, que fait la tangente MT avec l'horizontale, et le rapport $\frac{k}{h}$, qui est égal à $\operatorname{tang}\beta$, tendra vers la limite $\operatorname{tang}\alpha$.

Ainsi, quand la courbe qui représente la fonction a une tangente, et c'est ce qui a lieu en général, la fonction admet une dérivée.

94. Nous avons appelé dérivée d'une fonction continue $y = f(x)$ la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, quand ces deux accroissements tendent vers zéro. Cette dérivée $y' = f'(x)$ est une nouvelle fonction de x; si l'on en prend la dérivée, on aura la dérivée de la *première dérivée*, ou la *seconde dérivée* de la fonction proposée; nous la représenterons par le symbole y'' ou $f''(x)$. Cette seconde dérivée $y'' = f''(x)$ est une nouvelle fonction de x; si l'on en prend la dérivée, on aura la dérivée de la seconde dérivée ou la *troisième dérivée* de la fonction proposée; nous la représenterons par y''' ou $f'''(x)$. En continuant de cette manière, on obtient les dérivées des différents ordres de la fonction proposée.

Dérivée d'une somme.

95. Soient u, v, w diverses fonctions continues de la variable x, y leur somme algébrique

$$y = u + v - w.$$

Désignons par le symbole Δx l'accroissement que l'on donne à la variable x, par Δu, Δv, Δw, Δy les variations ou accroissements qui en résultent pour les fonctions u, v, w, y (la lettre Δ indique en général une variation ou une différence). Nous convenons aussi de représenter les dérivées de ces fonctions par les notations u', v', w', y', accentuant simplement les lettres qui désignent les fonctions.

On a évidemment

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

Si l'on divise tous les termes par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Supposons maintenant que l'accroissement Δx de la variable tende vers zéro, les accroissements correspondants Δu, Δv, Δw, Δy des fonctions tendront aussi vers zéro ; le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tendra vers une limite qui, par définition, est la dérivée de la fonction u, dérivée que nous représentons par u' ; les rapports $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta w}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendront de même vers des limites qui sont les dérivées des fonctions v, w, y, et l'on aura

$$y' = u' + v' - w'.$$

Ainsi, *la dérivée d'une somme algébrique est la somme des dérivées des diverses fonctions qui la composent.*

Dérivée d'une fonction entière.

96. Toute fonction entière du degré m est de la forme

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m.$$

C'est la somme algébrique des termes qui la composent. D'après le théorème précédent, sa dérivée est égale à la somme des dérivées de ses différents termes. Nous avons vu (n° 92) que pour trouver la dérivée d'une fonction entière simple ax^m, il faut la multiplier par l'exposant de x et diminuer ensuite cet exposant d'une unité; en appliquant cette règle à chacun des termes du polynôme, on a

$$f'(x) = mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}.$$

Le degré de chaque terme s'abaissant d'une unité, la dérivée est une fonction entière du degré $m - 1$. Le terme constant A_m ne donne rien dans la dérivée, et, en effet, quand x varie, l'accroissement k de la constante étant nul, on a $\frac{k}{h} = 0$, et la dérivée est nulle.

En prenant la dérivée de cette première dérivée, on obtient la seconde dérivée du polynôme proposé

$$f''(x) = m(m-1)A_0x^{m-2} + (m-1)(m-2)A_1x^{m-3} + \ldots\ldots + A_{m-2};$$

c'est une fonction entière du degré $m - 2$.

La troisième dérivée, ou la dérivée de la seconde dérivée,

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)A_0x^{m-3} + \ldots\ldots$$

est du degré $m - 3$, et ainsi de suite, chaque dérivation diminuant le degré d'une unité.

La dérivée de l'ordre m est du degré zéro; c'est une

constante. Les dérivées suivantes sont nulles. Ainsi un polynôme du degré m a m dérivées.

Exemple.

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 6.$$

En appliquant la règle énoncée plus haut, on obtient les dérivées successives :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 10x - 7, \\ f''(x) &= 6x + 10, \\ f'''(x) &= 6. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que le terme constant du ploynôme proposé n'entre pas dans la dérivée ; que les deux derniers termes n'entrent pas dans la seconde dérivée, etc. Le premier terme entre seul dans la dernière dérivée.

Développement d'une fonction entière f(x) *suivant les puissances croissantes de* h *quand on remplace* x *par* x + h.

97. Si dans la fonction entière

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m,$$

on remplace la variable x par $x + h$, il vient

$$\begin{aligned} f(x+h) = A_0(x+h)^m + A_1(x+h)^{m-1} + A_2(x+h)^{m-2} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + A_{m-1}(x+h) + A_m, \end{aligned}$$

et, en développant chaque terme suivant la loi du binôme,

$$\begin{array}{rll|l|l}
f(x+h)= & A_0x^m & +mA_0x^{m-1} & \dfrac{h}{1} \quad +m(m-1)A_0x^{m-2} & \dfrac{h^2}{1.2}+\ldots+m(m-1)\ldots2.1.A_0\dfrac{h^m}{1.2\ldots m}. \\
 & +A_1x^{m-1} & +(m-1)A_1x^{m-2} & +(m-1)(m-2)A_1x^{m-3} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & +A_2x^{m-2} & +(m-2)A_2x^{m-3} & +(m-2)(m-3)A_2x^{m-4} & \\
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & +A_{m-1}x & +A_{m-1} & & \\
 & +A_m & & &
\end{array}$$

Dans la première colonne verticale nous retrouvons le polynôme proposé $f(x)$. Dans la seconde colonne, qui contient h en facteur, nous trouvons la première dérivée $f'(x)$; et en effet on voit que l'on obtient ce second polynôme en multipliant chacun des termes du polynôme proposé par l'exposant de x et diminuant cet exposant d'une unité. Le polynôme écrit dans la troisième colonne, et qui contient $\frac{h^2}{1.2}$ en facteur, se déduit du précédent suivant la même loi; c'est la dérivée de la première dérivée, ou la seconde dérivée $f''(x)$ du polynôme proposé. Le polynôme suivant, coefficient de $\frac{h^3}{1.2.3}$, est la troisième dérivée $f'''(x)$, et ainsi de suite. Enfin, dans le dernier terme, le coefficient de $\frac{h^m}{1.2\ldots\ldots m}$ est la dérivée d'ordre m. Le développement de $f(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h s'écrira donc

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1}+f''(x)\frac{h^2}{1.2}+f'''(x)\frac{h^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+f^{(m)}(x)\frac{h^m}{1.2\ldots\ldots m}.$$

Dérivée d'un produit.

98. Considérons d'abord un produit de deux fonctions

$$y=uv.$$

Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx, les fonctions u, v, y éprouvent des accroissement correspondants Δu, Δv, Δy, et l'on a

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v),$$

ou, en effectuant la multiplication et supprimant dans les deux membres les quantités égales y et uv,

$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \times \Delta v.$$

Divisons tous les termes par Δx, il vient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \times \Delta v.$$

Si l'accroissement Δx de la variable x tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendent vers des limites qui sont les dérivées u', v', y' des fonctions u, v, y; le troisième terme du second membre devient nul, parce que le premier facteur $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers une valeur finie u', tandis que le second facteur tend vers zéro. On a donc

$$y' = uv' + vu'.$$

La dérivée d'un produit de deux facteurs égale le premier facteur multiplié par la dérivée du second, plus le second multiplié par la dérivée du premier.

Considérons maintenant un produit de trois fonctions

$$y = uvw.$$

Si l'on regarde le produit uv des deux premières comme ne formant qu'un seul facteur, et si l'on applique la règle précédente, on a

$$y' = (uv)w' + w(uv)';$$

en développant la dérivée $(uv)'$ du produit uv, il vient

$$y' = uvw' + w(uv' + vu'),$$

ou

$$y' = uvw' + uwv' + vwu'.$$

Ainsi, *la dérivée d'un produit de plusieurs facteurs est égale à la somme des produits que l'on obtient en multipliant la dérivée de chaque facteur par le produit de tous les autres.*

Exemples.

1° $$y = (2x - 5)(4x^2 + 7x - 3).$$

$$y' = (2x - 5)(8x + 7) + (4x^2 + 7x - 3)2 = 24x^2 - 12x - 41.$$

2° $$y = x^3(x^2 + 1)(3x - 1).$$

$$y' = x^3(x^2 + 1)3 + x^3(3x - 1)2x + (x^2 + 1)(3x - 1)3x^2$$
$$= 18x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 3x^2.$$

Dérivée d'un quotient.

99. Soit le quotient de deux fonctions

$$y = \frac{u}{v}.$$

La fonction u est le produit des deux fonctions v et y; si l'on prend la dérivée du produit $u = vy$, d'après la règle précédente, il vient

$$u' = vy' + yv';$$

d'où l'on déduit

$$y' = \frac{u' - yv'}{v},$$

et, en remplaçant dans le numérateur y par $\frac{u}{v}$,

$$y = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Ainsi, *la dérivée d'un quotient égale le dénominateur multiplié par la dérivée du numérateur, moins le numérateur multiplié par la dérivée du dénominateur, cette différence étant divisée par le carré du dénominateur.*

Exemples.

1°
$$y = \frac{x - 1}{x + 1},$$

$$y' = \frac{x + 1 - (x - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2}.$$

2°
$$y = \frac{5x^2 - 3x + 4}{x^2 - 1}.$$

$$y' = \frac{(x^2 - 1)(10x - 3) - (5x^2 - 3x + 4)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^2 - 18x + 3}{(x^2 - 1)^2}.$$

3°
$$y = \frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2x^2 + x^4},$$

$$y = \frac{-2x(a^4 + a^2x^2 + x^4) - (a^2 - x^2)(2a^2x + 4x^3)}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}$$

$$= \frac{2x(x^4 - 2a^2x^2 - 2a^4)}{(x^4 + a^2x^2 + a^4)^2}.$$

Dérivée d'une puissance.

100. Une puissance entière

$$y = u^m$$

d'une fonction u de la variable x est le produit de m facteurs égaux entre eux

$$y = uuu \ldots\ldots$$

Si l'on prend la dérivée de ce produit d'après la règle ordinaire, il vient

$$y' = u^{m-1}u' + u^{m-1}u' + \ldots\ldots$$

ou plus simplement

$$y' = mu^{m-1}u'.$$

On obtient la dérivée de la puissance d'une fonction en multipliant par l'exposant, diminuant cet exposant d'une unité, et multipliant le résultat par la dérivée de la fonction.

Ce théorème est vrai pour un exposant quelconque. Considérons une puissance fractionnaire

$$y = u^{\frac{m}{n}};$$

en élevant à la n^e puissance, on a

$$y^n = u^m.$$

Si l'on prend les dérivées des deux membres, d'après la règle précédente, il vient

$$ny^{n-1}y' = mu^{m-1}u';$$

d'où

$$y' = \frac{m}{n}\frac{u^{m-1}}{y^{n-1}}u',$$

et, en remplaçant y par sa valeur $u^{\frac{m}{n}}$,

$$y' = \frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}u'.$$

Considérons maintenant une puissance négative quelconque

$$y = u^{-m} = \frac{1}{u^m}.$$

En prenant la dérivée du quotient $\frac{1}{u^m}$, on a

$$y' = \frac{-mu^{m-1}u'}{u^{2m}} = -mu^{-m-1}u'.$$

C'est encore la même règle que pour les exposants positifs.

COROLLAIRE. *La dérivée d'une racine carrée égale la dérivée de la fonction placée sous le signe radical divisée par deux fois le radical.* Car, en appliquant la règle précédente à la fonction

$$y = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$y' = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}-1} u' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Exemples.

1° $$y = \sqrt{x}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2° $$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

3° $$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, \quad y' = -2x^{-3} = -\frac{1}{x^3}.$$

4° $$y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad y' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

5° $$y = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 5}, \quad y' = \frac{6x^2 - 8x}{2\sqrt{2x^3 - 4x^2 + 5}}.$$

6° $$y = x(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$y' = (a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + 2x^2\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2(a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^4 + a^2x^2 - 4x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

7° $$y = (a + bx^m)^n,$$

$$y' = n(a + bx^m)^{n-1} mbx^{m-1} = mnbx^{m-1}(a + bx)^{n-1}.$$

8° $$y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{d}{x^2} = a + bx^{-\frac{2}{3}} - cx^{-\frac{4}{3}} + dx^{-2},$$

$$y' = -\frac{2}{3} bx^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} cx^{-\frac{7}{3}} - 2dx^{-3} = -\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2d}{x^3}.$$

$$9^\circ\ y=\sqrt[4]{\left(a-\frac{b}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{(c^2-x^2)^2}\right)^3}=\left(a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

$$y'=\frac{3}{4}\left(a-bx^{-\frac{1}{2}}+(c^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}\times\left(\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}-\frac{4}{3}x(c^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}\right).$$

Dérivée d'une fonction de fonction.

101. Soit y une fonction $f(u)$ de la quantité u qui est elle-même une fonction de la variable x; par l'intermédiaire de la variable u, y pourra être considérée comme une fonction de x; c'est ce que l'on nomme une *fonction de fonction.*

Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx, il en résulte pour u un accroissement Δu, et pour y un accroissement Δy. On a évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Lorsque l'accroissement Δx de la variable tend vers zéro, l'accroissement Δu, et par suite l'accroissement Δy, tendent aussi vers zéro; la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est la dérivée y' de y considérée comme fonction de x; la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta u}$ est la dérivée $f'(u)$ de la fonction $f(u)$, c'est-à-dire de y considérée comme fonction de la variable u; enfin la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ est la dérivée u' de la fonction u de x. On a donc

$$y'=f'(u)\times u'.$$

Ainsi *la dérivée d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées des fonctions qui la composent.*

Ce principe peut être généralisé. Soit y une fonction $f(v)$

de la quantité v, qui est une fonction $\varphi(u)$ de la quantité u, qui est elle-même une fonction de x; par l'intermédiaire des quantités v et u, y est finalement une fonction de x dont nous cherchons la dérivée. On a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

et en prenant les limites,

$$y' = f'(v) \times \varphi'(u) \times u'.$$

La règle établie plus haut, pour trouver la dérivée d'une fonction u^m, est un cas particulier du théorème que nous venons de démontrer sur les fonctions des fonctions.

Dérivée du sinus.

102. Soit la fonction

$$y = \sin x.$$

Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, il en résulte pour la fonction l'accroissement

$$k = \sin(x+h) - \sin x.$$

En prenant le rapport des deux accroissements et transformant la différence des sinus en produit, il vient

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h},$$

ou

$$\frac{k}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Quand l'accroissement h de la variable tend vers zéro, le rapport $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ du sinus à l'arc $\frac{h}{2}$ tend vers l'unité, tandis que le second facteur se réduit à $\cos x$; le rapport $\frac{k}{h}$ tend donc vers une limite égale à $\cos x$, et l'on a

$$y' = \cos x.$$

Ainsi *la dérivée du sinus est le cosinus.*

Dérivée du cosinus.

103. Soit la fonction

$$y = \cos x.$$

On a de la même manière

$$\frac{k}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

et, en prenant les limites,

$$y' = -\sin x.$$

Ainsi *la dérivée du cosinus est le sinus pris en signe contraire.*

Au moyen de ce qui précède, on obient aisément les dérivées successives du sinus et du cosinus.

$$
\begin{array}{ll}
y = \sin x, & y = \cos x, \\
y' = \cos x, & y' = -\sin x, \\
y'' = -\sin x, & y'' = -\cos x, \\
y''' = -\cos x; & y''' = \sin x, \\
y^{(\text{iv})} = \sin x, & y^{(\text{iv})} = \cos x, \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

On voit que les dérivées se reproduisent périodiquement de quatre en quatre.

Dérivées de la tangente et de la sécante.

104. On obtient la dérivée de la fonction

$$y = \operatorname{tang} x,$$

en prenant la dérivée du quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$, ce qui donne

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

De même la cotangente

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

a pour dérivée

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

La sécante pouvant se mettre sous la forme

$$y = \operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x},$$

on obtiendra sa dérivée par la règle des quotients

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

De même la cosécante

$$y = \text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}$$

a pour dérivée

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Dérivées des fonctions circulaires inverses.

105. Soit la fonction inverse

$$y = \text{arc}\sin x.$$

On en déduit

$$\sin y = x.$$

Prenons les dérivées des deux membres ; y étant une fonction de x, le premier membre $\sin y$ est une fonction de fonction, qui a pour dérivée $\cos y \times y'$; la dérivée du second membre x est l'unité ; on a donc

$$\cos y \times y' = 1\,;$$

d'où

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Puisque $\sin y = x$, on a $\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$; en remplaçant $\cos y$ par sa valeur, il vient

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}.$$

Il faut mettre devant le radical le signe de $\cos y$; si l'arc se termine dans le premier ou dans le quatrième quadrant,

on prendra le signe $+$; s'il se termine dans le second ou dans le troisième, on prendra le signe $-$.

106. La dérivée de la fonction inverse

$$y = \text{arc}\cos x$$

s'obtient de la même manière. On a, en effet,

$$\cos y = x,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$-\sin y \times y' = 1;$$

d'où l'on déduit

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

On mettra devant le radical le signe de $\sin y$.

107. Considérons enfin la fonction inverse

$$y = \text{arc tang}\, x.$$

On a

$$\text{tang}\, y = x,$$

et, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1;$$

d'où

$$y' = \cos^2 y.$$

Mais on sait que

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2};$$

donc

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dérivée de la fonction exponentielle.

108. Soit la fonction exponentielle

$$y = a^x.$$

Si l'on donne à la variable x l'accroissement h, la fonction éprouve un accroissement

$$k = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1),$$

et le rapport des deux accroissements est

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

On sait que, lorsque h est très-petit, la différence $a^h - 1$ est très-petite; posons donc

$$a^h - 1 = \alpha,$$

d'où

$$a^h = 1 + \alpha,$$

et, en prenant les logarithmes népériens des deux membres,

$$h\mathrm{L}a = \mathrm{L}(1+\alpha),$$

$$h = \frac{\mathrm{L}(1+\alpha)}{\mathrm{L}a}.$$

Remplaçons h par sa valeur, l'expression du rapport devient

$$\frac{k}{h} = a^x \frac{\alpha . \mathrm{L}a}{\mathrm{L}(1+\alpha)} = \frac{a^x \mathrm{L}a}{\frac{1}{\alpha}\mathrm{L}(1+\alpha)} = \frac{a^x \mathrm{L}a}{\mathrm{L}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Lorsque h tend vers zéro, α tend aussi vers zéro, et la quantité $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ devient égale à e (n° 72); mais $Le = 1$; donc

$$y' = \lim \frac{k}{h} = a^x La.$$

Ainsi, ***pour avoir la dérivée d'une fonction exponentielle, il suffit de multiplier cette fonction par le logarithme népérien de la base.***

Considérons en particulier la fonction exponentielle $y = e^x$; puisque $Le = 1$, on a $y' = e^x$. Ainsi, *la dérivée de la fonction* e^x *est cette fonction elle-même.* La fonction e^x jouit de la propriété caractéristique de se reproduire elle-même par la dérivation.

Dérivée de la fonction logarithmique.

109. La fonction logarithmique

$$y = \log x$$

est l'inverse de la fonction exponentielle. Si a désigne la base du système de logarithmes, on a

$$a^y = x.$$

Prenons les dérivées des deux membres d'après la loi que nous venons de démontrer, en regardant a^y comme une fonction de fonction; il vient

$$a^y La \times y' = 1,$$

d'où

$$y' = \frac{1}{a^y La}.$$

En remplaçant a^y par x, et remarquant que la quantité $\frac{1}{La}$ est le module M du système de logarithmes (n° 87), on a enfin

$$y' = \frac{1}{xLa} = \frac{M}{x}.$$

Telle est la dérivée de la fonction logarithmique.

Considérons comme cas particulier la fonction logarithmique népérienne

$$y = Lx;$$

le module étant l'unité, on a

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Résumé.

110. Nous avons trouvé les dérivées des fonctions simples que l'on considère ordinairement en mathématiques; il est nécessaire de les apprendre par cœur; le tableau suivant permet de les embrasser d'un coup d'œil :

$y = x^m,$	$y' = mx^{m-1},$	m étant quelconque,
$y = \sin x,$	$y' = \cos x,$	
$y = \cos x,$	$y' = -\sin x,$	
$y = \operatorname{tang} x,$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x},$	
$y = \arcsin x,$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	en supposant l'arc x compris entre o et $\frac{\pi}{2}$,
$y = \arccos x,$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	
$y = \operatorname{arc\,tang} x,$	$y' = \frac{1}{1+x^2},$	

$y = a^x, \qquad y' = a^x \mathrm{L}a,$

$y = e^x, \qquad y' = e^x,$

$y = \log x, \qquad y' = \frac{1}{x\mathrm{L}a},$

$y = \mathrm{L}x, \qquad y' = \frac{1}{x}.$

111. Les fonctions complexes pouvant être considérées comme des fonctions de fonctions, on calculera leurs dérivées d'après la loi connue. En voici quelques exemples :

1° $y = \sin x^2$. Si l'on pose $u = x^2$, on a $y = \sin u$ et l'on voit que y est une fonction de fonction. L'application du théorème donne

$$y' = \cos u \times u' = 2x \cos x^2.$$

2° $y = e^{\sin x}$. Si l'on pose $u = \sin x$, on a encore une fonction de fonction $y = e^u$, qui admet pour dérivée

$$y' = e^u \times u' = e^{\sin x} \times \cos x.$$

3° $y = e^{\sin x^2}$. Si l'on pose $u = x^2$, $v = \sin u$, on a une fonction de fonction $y = e^v$ plus compliquée que les précédentes; le même théorème donne

$$y' = e^v . \cos u . 2x = 2xe^{\sin x^2} \cos x^2.$$

4° $y = \mathrm{L}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. En posant $u = x + \sqrt{1 + x^2}$, on a la fonction de fonction $y = \mathrm{L}u$, qui admet pour dérivée

$$y' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

5° $y = x^x$. En remarquant que, d'après la définition même des logarithmes népériens, on a identiquement $x = e^{\mathrm{L}x}$, on pourra écrire cettte fonction sous la forme $y = e^{x\mathrm{L}x}$; si l'on

pose $u = x\mathrm{L}x$, on a la fonction de fonction $y = e^u$, qui admet pour dérivée

$$y' = e^u u' = e^u(1 + \mathrm{L}x) = x^x(1 + \mathrm{L}x).$$

Par l'habitude, on arrive à décomposer les fonctions complexes par la pensée, sans employer les lettres auxiliaires u et v.

Exercices.

Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

1° $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$. *Rép.* : $y' = \dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2° $y = \mathrm{tang}\, x - \cot x$. $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

3° $y = x(\mathrm{L}x - 1)$, $y' = \mathrm{L}x$,

4° $y = e^x(x - 1)$, $y' = xe^x$.

5° $y = x\sin x + \cos x$, $y' = x\cos x$.

6° $y = -x\cos x + \sin x$, $y' = x\sin x$.

7° $y = \dfrac{1}{2}\mathrm{L}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, $y' = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

8° $y = \mathrm{L}(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

9° $y = \mathrm{L}\left(\dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$, $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

10° $y = \arccos\left(\dfrac{a - 2x}{a}\right)$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{ax - x^2}}$.

11° $y = \dfrac{1}{6}\mathrm{L}\left(\dfrac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $y' = \dfrac{1}{x^3 - 1}$.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE LA VARIATION DES FONCTIONS.

112. Soit $f(x)$ une fonction continue, $f'(x)$ sa dérivée. Nous avons appelé dérivée d'une fonction la limite du rapport de l'accroissement k de la fonction à l'accroissement h de la variable, quand ces accroissements tendent vers zéro.

Lorsque h est très-petit, le rapport $\frac{k}{h}$ diffère très-peu de sa limite; on a donc

$$\frac{k}{h}=f'(x)+\varepsilon,$$

d'où

$$k=h[f'(x)+\varepsilon],$$

ε étant une quantité très-petite qui s'annule avec h. Quand la dérivée $f'(x)$ n'est pas nulle, on peut rendre h assez petite pour que la quantité ε soit moindre que $f'(x)$ en valeur absolue; alors c'est la quantité $f'(x)$ qui donne son signe à la parenthèse. Si l'on suppose h positive, c'est-à-dire la variable x croissante, on voit que la variation k de la fonction aura le signe de la dérivée $f'(x)$; quand la dérivée sera positive, k sera positive et la fonction ira en croissant; quand la dérivée sera négative, k sera négative et la fonction ira en décroissant.

On déduit de là les théorèmes suivants : 1° Si la dérivée d'une fonction reste positive pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b, la fonction va en croissant quand x

croît de a à b; 2° si la dérivée reste négative, la fonction va en décroissant.

113. Lorsqu'une fonction, après avoir augmenté, décroît ensuite, elle passe par un *maximum*, c'est-à-dire par une valeur plus grande que les valeurs voisines. Au contraire, lorsque la fonction, après avoir diminué, croît ensuite, elle passe par un *minimum*, c'est-à-dire par une valeur plus petite que les valeurs voisines.

Dans le premier cas, la fonction commençant par croître, la dérivée est d'abord positive; la fonction décroissant ensuite, la dérivée devient négative. Ainsi, quand la fonction passe par un maximum, la dérivée change de signe, de positive devenant négative.

Dans le second cas, la fonction commençant par décroître, la dérivée est d'abord négative; la fonction croissant ensuite, la dérivée devient positive. Ainsi, quand la fonction passe par un minimum, la dérivée change de signe, de négative devenant positive.

Les réciproques sont vraies : lorsque la dérivée change de signe, la fonction passe par un maximum ou par un minimum. Si la dérivée de positive devient négative, la fonction, croissant d'abord pour décroître ensuite, passe par un maximum; si la dérivée de négative devient positive, la fonction, décroissant d'abord pour croître ensuite, passe par un minimum.

Ordinairement la dérivée d'une fonction continue est aussi finie et continue; elle change de signe en passant par la valeur intermédiaire zéro. On obtiendra donc les valeurs de x qui rendent la fonction maximum ou minimum en cherchant les valeurs de x qui annulent la dérivée, et qui en outre lui font éprouver un changement de signe.

Exemples.

114. Question I. ***Étudier la variation du volume d'un cylindre circulaire droit dont la surface totale est constante.***

Appelons x le rayon de la base, y la hauteur, et représentons la surface totale donnée par $2\pi a^2$; nous avons la relation

$$2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi a^2,$$

ou plus simplement

$$x^2 + xy = a^2.$$

Le volume V du cylindre a pour expression

$$V = \pi x^2 y,$$

et si l'on remplace y par sa valeur $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$ tirée de la relation précédente,

$$V = \pi x(a^2 - x^2) = \pi(a^2 x - x^3);$$

c'est une fonction de la variable indépendante x.

Les valeurs de x et de y devant rester positives, le rayon x de la base ne pourra varier que de o à a. Quand x varie de o à a, on voit que le volume part de zéro pour revenir à zéro, en passant par une suite de valeurs finies. Pour étudier la variation de cette fonction, prenons sa dérivée

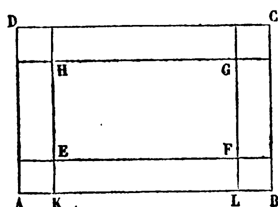
$$V' = \pi(a^2 - 3x^2) = 3\pi\left(\frac{a^2}{3} - x^2\right).$$

La dérivée est positive pour les valeurs de x inférieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, négative pour les valeurs de x supérieures à $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Si

donc on fait croître x de o à $\frac{a}{\sqrt{3}}$, le volume ira en augmentant de zéro à une certaine valeur maximum ; x croissant ensuite de $\frac{a}{\sqrt{3}}$ à a, le volume ira en diminuant de cette valeur maximum à o.

Pour $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, on a $y = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Ainsi, parmi tous les cylindres qui ont même surface totale, le plus grand est celui dont la hauteur est égale au diamètre de la base.

115. QUESTION II. *Étant donnée une feuille de carton rectangulaire* ABCD, *si, après avoir mené des parallèles aux quatre côtes à la même distance, on enlève les petits carrés dans les angles, et qu'on relève les portions rectangulaires telles que* EKLF, *on forme une boîte à fond rectangulaire* EFGH. *Étudier la variation du volume de cette boîte.*



Appelons $2a$ et $2b$ les côtés AB et AD de la feuille de carton, x la distance variable AK à laquelle on mène les parallèles ; le fond de la boîte est un rectangle ayant pour côtés $EF = 2(a-x)$ et $EH = 2(b-x)$, et pour surface $4(a-x)(b-x)$; la hauteur de la boîte est x ; le volume a donc pour expression

$$V = 4x(a-x)(b-x).$$

Si l'on suppose $a > b$, x peut varier de o à b ; le volume part de zéro pour revenir à zéro, en conservant des valeurs finies. La dérivée de cette fonction est

$$V' = 4[3x^2 - 2(a+b)x + ab.]$$

La parenthèse est un polynome entier du second degré. Si dans ce polynome on remplace x par zéro, on a un résultat positif $+ab$; si l'on remplace x par b, on a un résultat négatif $-4b(a-b)$; ainsi le polynome a ses deux racines réelles, la plus petite x' comprise entre o et b, la plus grande x'' supérieure à b, et l'on écrira

$$V' = 12(x-x')(x-x'').$$

Quand x croît de o à x', la dérivée étant positive, le volume augmente de zéro à une certaine valeur maximum; x croissant ensuite de x' à b, la dérivée devient négative et le volume diminue de cette valeur maximum jusqu'à zéro.

Le volume acquiert sa valeur maximum pour la valeur

$$x = x' = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{3}.$$

116. Question III. *Étudier la variation de la surface totale d'un cylindre circulaire droit inscrit dans une sphère donnée.*

Si l'on appelle x le rayon de la base et $2y$ la hauteur du cylindre, on a

$$x^2+y^2=r^2.$$
$$S = 2\pi x^2 + 4\pi xy;$$

d'où

$$S = 2\pi\left(x^2 + 2x\sqrt{r^2-x^2}\right).$$

Le rayon x peut varier de o à r. La fonction S, que l'on veut étudier, a pour dérivée

$$S' = \frac{4\pi\left[x\sqrt{r^2-x^2}+(r^2-2x^2)\right]}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Quand x croît de o à $\frac{r}{\sqrt{2}}$, la dérivée est positive et la fonction croît de zéro à $3\pi r^2$. Faisons maintenant varier x de $\frac{r}{\sqrt{2}}$ à r; on a

$$S' = \frac{4\pi\left[x\sqrt{r^2-x^2}-(2x^2-r^2)\right]}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

La parenthèse est la différence de deux quantités; si l'on multiplie et si l'on divise par la somme, il vient

$$S' = \frac{4\pi\left[x^2(r^2-x^2)-(2x^2-r^2)^2\right]}{\left[x\sqrt{r^2-x^2}+(2x^2-r^2)\right]\sqrt{r^2-x^2}},$$

$$S' = \frac{4\pi(-5x^4+5r^2x^2-r^4)}{\left[x\sqrt{r^2-x^2}+(2x^2-r^2)\right]\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Le dénominateur étant positif, il suffit d'examiner le signe du numérateur, qui est un polynôme entier du second degré en x^2. Quand, dans ce polynôme pris sous sa première forme, on remplace x^2 par $\frac{r^2}{2}$, on obtient un résultat positif; quand on remplace x^2 par r^2, on obtient un résultat négatif; on en conclut que les deux racines du trinôme sont réelles, que la plus petite x'^2 est inférieure à $\frac{r^2}{2}$ et la plus grande x''^2 comprise entre $\frac{r^2}{2}$ et r^2. On a donc

$$S' = \frac{-20\pi(x^2-x'^2)(x^2-x''^2)}{\left[x\sqrt{r^2-x^2}+(2x^2-r^2)\right]\sqrt{r^2-x^2}}.$$

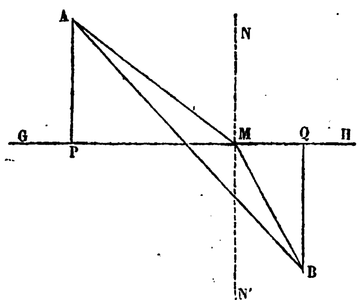
Quand x varie de $\frac{r}{\sqrt{2}}$ à x'', la dérivée est positive, et la fonction continue à croître de $3\pi r^2$ jusqu'à une valeur

maximum; x variant ensuite de x'' à r, la dérivée est négative, et la fonction décroît de la valeur maximum à $2\pi r^2$. Le maximum de la surface est donné par la valeur

$$x = x'' = r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}},$$

117. QUESTION IV. *Soit* GH *la ligne de séparation de deux milieux; la lumière se meut dans ces deux milieux avec des vitesses différentes* v *et* v'. *Quel chemin doit suivre le rayon lumineux pour aller du point* A *au point* B *dans le temps le plus court?*

Nous pouvons déterminer la position des points A et B par leurs distances AP et BQ à la droite GH, et par la distance PQ; nous désignerons ces trois longueurs connues par a, b, c. Si la vitesse était la même dans les deux milieux, il est clair que la lumière suivrait le chemin le plus court, c'est-à-dire la droite AB; mais la vitesse v dans le milieu supérieur étant plus grande que la vitesse v' dans le milieu inférieur, il y a avantage à ce que la lumière parcoure une plus grande longueur dans le premier milieu et une moindre dans le second; elle suivra donc une ligne brisée telle que AMB. Appelons x la distance cherchée PM; la lumière parcourt dans les deux milieux les longueurs



$$AM = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad MB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2};$$

elle emploie à les parcourir les temps

$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v}, \qquad \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v'};$$

elle met donc, pour aller de **A** à **B**, en suivant le chemin AMB, le temps

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v'}.$$

Ce temps est une fonction de x, considérée comme variable indépendante ; elle a pour dérivée

$$t'=\frac{x}{v\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{v'\sqrt{b^2+(c-x^2)}}.$$

Au point M menons une perpendiculaire NN' à GH ; l'angle AMN est l'angle d'incidence i, l'angle BMN' l'angle de réfraction i'. Comme a

$$\sin i=\frac{\text{PM}}{\text{AM}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},$$
$$\sin i'=\frac{\text{QM}}{\text{BM}}=\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}};$$

il en résulte cette expression de la dérivée

$$t'=\frac{\sin i}{v}-\frac{\sin i'}{v'}.$$

Quand le point M se déplace de P à Q, l'angle i augmente de zéro à une certaine valeur, tandis que l'angle i' diminue au contraire d'une certaine valeur à zéro. Il y a donc un point, et un seul, pour lequel la dérivée s'annulle : avant, elle est négative ; au delà, elle devient positive. La fonction que l'on étudie diminue jusque-là pour augmenter

ensuite. Le minimum a lieu, quand on a

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'},$$

ou

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{v}{v'}.$$

C'est par cette considération du temps minimum que Fermat a trouvé pour la première fois la loi de la réfraction de la lumière.

118. Question V. *Étudier la variation de la surface d'un secteur sphérique de volume constant.*

Appelons x le rayon du secteur, y la hauteur de la calotte qui lui sert de base, et supposons que le volume soit égal à celui d'une sphère de rayon donné a; nous aurons la relation

$$\frac{2}{3}\pi x^2 y = \frac{4}{3}\pi a^3,$$

ou plus simplement

$$x^2 y = 2a^3, \qquad y = \frac{2a^3}{x^2}.$$

La surface du secteur a pour expression

$$S = \pi x\sqrt{y(2x-y)} + 2\pi x y,$$

et, si l'on remplace y par sa valeur,

$$S = 2\pi a\left[\frac{2a^2}{x} + \sqrt{a\left(x - \frac{a^3}{x^2}\right)}\right].$$

La hauteur y de la calotte étant plus petite que le diamètre $2x$, le rayon x est plus grand que a; ainsi la va-

riable x peut croître à partir de a indéfiniment. La surface a pour dérivée

$$S' = \frac{\pi a^2\left[x^3 + 2a^3 - 4a\sqrt{a(x^3 - a^3)}\right]}{x^2\sqrt{a(x^3 - a^3)}}.$$

Le numérateur est la différence de deux quantités; si l'on multiplie les deux termes de la fraction par la somme, on a

$$S' = \frac{\pi a^2(x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6)}{x^2\sqrt{a(x^3 - a^3)}\left[x^3 + 2a^3 + 4a\sqrt{a(x^3 - a^3)}\right]}.$$

Le dénominateur étant positif, il suffit d'examiner le signe du trinôme

$$x^6 - 12a^3x^3 + 20a^6,$$

qui est du second degré par rapport à x^3, et qui, décomposé en facteurs, s'écrit

$$(x^3 - 2a^3)(x^3 - 10a^3).$$

Quand x varie de a à $a\sqrt[3]{2}$, la dérivée étant positive, la surface croît; x variant de $a\sqrt[3]{2}$ à $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée est négative et la surface décroît; x croissant ensuite indéfiniment au delà de $a\sqrt[3]{10}$, la dérivée est positive, et la surface augmente.

Examinons maintenant les formes successives par lesquelles passe le secteur. Lorsque $x = a$, on a $y = 2a$, $S = 4\pi a^2$; le secteur se réduit à une sphère de rayon a. Le rayon x croissant de a à $a\sqrt[3]{2}$, y décroît de $2a$ à $a\sqrt[3]{2}$, le secteur, qui est plus grand qu'un hémisphère, s'ouvre de plus en plus, jusqu'à ce qu'il arrive à la forme d'un hémisphère; la surface augmente de la valeur ini-

tiale $4\pi a^2$ au *maximum* $3\pi a^2 \sqrt[3]{4}$. Le rayon croissant ensuite de $a\sqrt[3]{2}$ à $a\sqrt[3]{10}$, y décroît de $a\sqrt[3]{2}$ à $\frac{a\sqrt[3]{10}}{5}$, le secteur, qui est maintenant moindre qu'un hémisphère, s'allonge jusqu'à ce que la hauteur de la calotte ne soit que le cinquième du rayon ; sa surface diminue du maximum $3\pi a^2 \sqrt[3]{4}$ au *minimum* $\pi a^2 \sqrt[3]{100}$. Le rayon x croissant ensuite au delà de $a\sqrt[3]{10}$ indéfiniment, y diminue et tend vers zéro ; le secteur continue à s'allonger, et sa surface augmente indéfiniment.

On peut remarquer que la valeur minimum $\pi a^2 \sqrt[3]{100}$, par laquelle passe la surface pour $x = a\sqrt[3]{10}$, est plus grande que la valeur initiale $4\pi a^2$. Ainsi, c'est quand le secteur a la forme d'une sphère que sa surface est la plus petite possible. Nous remarquerons encore que la surface passe *une* seule fois par toute valeur comprise entre la valeur initiale $4\pi a^2$ et le minimum $\pi a^2 \sqrt[3]{100}$, *trois* fois par toute valeur comprise entre ce minimum et le maximum $3\pi a^2 \sqrt[3]{4}$, et enfin *une* seule fois par toute valeur plus grande que ce maximum.

119. Question IV. ***Étudier la variation du volume du secteur sphérique dont la surface totale est constante.***

On peut déduire cette question de la précédente. Il sera plus commode de prendre pour variable, non pas le rayon x du secteur ou la hauteur y de la calotte, mais le rapport $\frac{x}{y}$ de ces deux longueurs, rapport que nous désignerons par z. Cette nouvelle variable caractérisera la forme du solide et aura la même valeur pour tous les solides semblables.

Quand x croît de a à ∞, y décroît de $2a$ à o et par conséquent z croît de $\frac{1}{2}$ à ∞. Donnons à la nouvelle variable deux valeurs z et z'; soient S et S' les surfaces totales des solides correspondants, quand le volume V reste constant; imaginons que l'on change les dimensions du second solide en le laissant semblable à lui-même, de manière que sa surface, qui était S', devienne égale à S; son volume, qui était V, acquerra la valeur V' donnée par la relation

$$\left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \left(\frac{S}{S'}\right)^3.$$

Ainsi, quand on passe d'une forme à une autre en laissant constant, soit le volume, soit la surface, on voit que la surface dans le premier cas, le volume dans le second cas, varient en sens contraires; si la surface augmente, le volume diminue ou inversement. A un minimum de la surface correspondra un maximum du volume et à un maximum de la surface un minimum de volume.

La variable z croissant de $\frac{1}{2}$ à 1, le secteur passe de la forme d'une sphère entière à celle d'un hémisphère et le volume diminue; z croissant de 1 à 5, le volume augmente; z croissant à partir de 5 indéfiniment, le volume diminue et tend vers zéro. Le volume a passé d'abord par un minimum, puis par un maximum.

La plupart des questions géométriques se correspondent ainsi deux à deux.

Exercices.

Question I. Étudier la variation de la surface d'un trapèze inscrit dans un demi-cercle.

QUESTION II. Étudier la variation de la surface totale d'un cône circulaire droit inscrit dans une sphère donnée.

QUESTION III. Étudier la variation du volume d'un parallélipipède rectangle à base carrée dont la surface totale est donnée.

QUESTION IV. Étudier la variation du volume d'une niche de surface donnée.

QUESTION V. On fait mouvoir une lumière sur une droite verticale; étudier la variation de la quantité de lumière reçue par une portion très-petite du plan horizontal.

QUESTION VI. Sur les faces d'un cube on place six pyramides régulières de même hauteur; la surface totale étant donnée, étudier la variation du volume du solide ainsi formé.

QUESTION VII. Sur les faces d'un tétraèdre régulier on place quatre pyramides composées chacune de trois triangles isolés égaux. La surface totale étant donnée, étudier la variation du volume du solide ainsi formé.

QUESTION VIII. Un aéromètre est formé d'un cylindre de rayon donné terminé par deux cônes égaux. La surface totale étant donnée, étudier la variation du volume.

QUESTION IX. Un triangle est formé par trois arcs de cercle égaux entre eux et de longueur donnée; étudier la variation de la surface.

CHAPITRE III.

DÉRIVÉES D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES.

120. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des fonctions d'une seule variable; nous allons dire quelques mots des

fonctions de plusieurs variables. Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables indépendantes x et y (on nomme variables indépendantes des quantités qui varient d'une manière tout à fait arbitraire et indépendamment l'une de l'autre). Si, regardant y comme une constante, nous prenons la dérivée de la fonction par rapport à la variable x, nous aurons ce qu'on appelle la *dérivée partielle* de la fonction par rapport à x. De même, si regardant x comme une constante, nous prenons la dérivée par rapport à la variable y, nous aurons la dérivée partielle par rapport à y. Telles sont les deux dérivées partielles du premier ordre de la fonction proposée ; nous les désignerons par les notations f'_x et f'_y, l'indice indiquant la lettre par rapport à laquelle on dérive.

Si l'on dérive deux fois successivement, soit deux fois par rapport à x, soit une fois rapport à x et une seconde fois par rapport à y, soit deux fois par rapport à y, on obtient trois dérivées partielles du second ordre que nous désignerons par les notations f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2}. Et ainsi de suite.

Par exemple, soit la fonction

$$f(x, y) = 3x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 4y + 2.$$

En dérivant par rapport à x ou par rapport à y, on a les deux dérivées partielles du premier ordre

$$f'_x = 6x - 5y - 3,$$
$$f'_y = -5x + 2y + 4.$$

En dérivant une seconde fois, soit par rapport à x, soit par rapport à y, on forme les trois dérivées partielles du second ordre

$$f''_{x^2} = 6, \quad f''_{xy} = -5, \quad f''_{y^2} = 2.$$

Les dérivées suivantes sont nulles.

Théorème sur les fonctions homogènes.

121. On dit qu'une fonction entière de x, y, z,... est homogène et du degré m, lorsque la somme des exposants de ces lettres dans chacun des termes est constante et égale à m. Afin de préciser, nous supposerons que la fonction contient trois lettres x, y, z. Chacun des termes est de la forme $Ax^n y^p z^q$, et l'on peut écrire

$$f(x, y, z) = \Sigma A x^n y^p z^q.$$

En prenant la dérivée par rapport à chacune des lettres, on a

$$\begin{aligned} f'_x &= \Sigma n A x^{n-1} y^p z^q, \\ f'_y &= \Sigma p A x^n y^{p-1} z^q, \\ f'_z &= \Sigma q A x^n y^p z^{q-1}. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie ces dérivées respectivement par x, y, z, il vient

$$\begin{aligned} x f'_x &= \Sigma n A x^n y^p z^q, \\ y f'_y &= \Sigma p A x^n y^p z^q, \\ z f'_z &= \Sigma q A x^n y^p z^q. \end{aligned}$$

On en déduit

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = \Sigma (n + p + q) A x^n y^p z^q.$$

La somme des exposants $m + n + p$ étant constante et égale à m, on a

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = m \Sigma A x^n y^p z^q,$$

ou

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = m f(x, y, z),$$

Dérivées des fonctions composées.

122. Soit une fonction $f(u, v)$ de deux quantités u et v qui sont elles-mêmes des fonctions de la variable x; il est clair que y est en définitive une fonction de la variable x. On demande sa dérivée. Si l'on donne à la variable x l'accroissement Δx, il en résulte pour u et v les accroissements Δu et Δv, et pour y l'accroissement Δy, et l'on a

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v),$$

ou

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

En divisant par Δx, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \times \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Supposons maintenant que Δx tende vers zéro, les rapports $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent vers les dérivées u' et v' des fonctions u et v. Dans le rapport

$$\frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v},$$

on voit que le numérateur est l'accroissement qu'éprouve la fonction $f(u, v)$ quand on donne à la variable v l'accroissement Δv, u restant constante; la limite de ce rapport est donc la dérivée partielle $f'_v(u, v)$ de la fonction $f(u, v)$ par rapport à v, et le second terme a pour limite

$$f'_v(u, v) \times v'.$$

Considérons maintenant le rapport

$$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v) - f(u, v+\Delta v)}{\Delta u};$$

le numérateur est l'accroissement qu'éprouve la fonction $f(u, v+\Delta v)$, quand on donne à la variable u l'accroissement Δu; ce rapport, en vertu du principe établi au n° 112, est donc égal à

$$f'_u(u, v+\Delta v) + \varepsilon,$$

la quantité ε s'évanouissant avec Δu. D'autre part, la fonction $f'_u(u, v)$ étant continue, on a

$$f'_u(u, v+\Delta v) = f'_u(u, v) + \varepsilon',$$

la quantité ε' s'évanouissant avec Δv; il en résulte que le rapport considéré est égal à

$$f'_u(u, v) + \varepsilon + \varepsilon'.$$

Si maintenant on fait tendre Δx vers zéro, Δu et Δv tendent aussi vers zéro, ainsi que ε et ε', et le rapport a pour limite $f'_u(u, v)$. La limite du premier terme est donc

$$f'_u(u, v) \times u'.$$

On a de la sorte

$$y' = f'_u(u, v) \times u' + f'_v(u, v) \times v'.$$

Ainsi la dérivée d'une fonction de deux fonctions u et v d'une même variable x égale la dérivée partielle de la fonction proposée par rapport à u multipliée par la dérivée de u, plus la dérivée partielle par rapport à v multipliée par la dérivée de v.

Exemples.

1° Prenons comme exemple la fonction $y = x^x$, dont nous avons déjà trouvé la dérivée (n° 111). Si l'on pose $u = x$, $v = x$, on a $y = u^v$; d'où, en appliquant le théorème précédent,

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v \mathrm{L}u . v' = x^x + x^x \mathrm{L}x = x^x(1 + \mathrm{L}x).$$

2° $y = (\sin x)^{4x}$. Posant $u = \sin x$, $v = 4x$, on aura de de même $y = u^v$; d'où

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v \mathrm{L}u . v' = 4x \cos x (\sin x)^{4x-1} + 4 (\sin x)^{4x} \mathrm{L}(\sin x).$$

Dérivées des fonctions implicites.

123. On dit qu'une fonction est *implicite* lorsqu'elle est liée à la variable par une équation non résolue. Ainsi l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

dans laquelle le premier membre est une fonction quelconque des deux variables x et y, définit une fonction implicite y de x. Si l'on pouvait résoudre l'équation, on en déduirait $y = \varphi(x)$ et la fonction deviendrait *explicite*.

On obtient aisément la dérivée d'une fonction implicite. En effet, prenons la dérivée de la fonction $f(x, y)$, dans laquelle nous regardons x comme la variable indépendante, et y comme une fonction de x; cette dérivée, d'après le théorème précédent, est égale à

$$f'_x + f'_y \times y'.$$

Comme la fonction $f(x, y)$ est constamment nulle, sa dé-

rivée est aussi constamment nulle, et l'on a l'équation

$$f'_x + f'_y \times y' = 0,$$

d'où l'on déduit

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Telle est l'expression de la dérivée de la fonction implicite y.

Exemples.

1° Considérons la fonction implicite y définie par l'équation

$$x^2 - 4xy + y^2 + 2x = 0.$$

On a, d'après la formule que nous venons d'établir,

$$y' = -\frac{2x - 4y + 2}{-4x + 2y} = \frac{2y - x - 1}{y - 2x}.$$

L'équation proposée, étant du second degré par rapport à y, peut être résolue, ce qui donne

$$y = 2x \pm \sqrt{3x^2 - 2x}.$$

La fonction devenant ainsi explicite, on trouve directement sa dérivée,

$$y' = 2 \pm \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}},$$

En remplaçant y par sa valeur dans la première expression de y', on obtient la seconde.

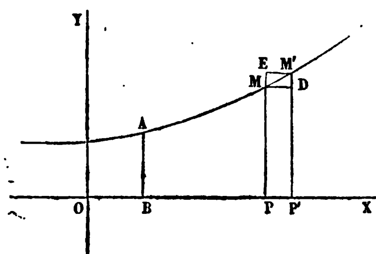
2° $\quad 3x^5 - 4xy + y^3 = 0, \qquad y' = -\frac{15x^4 - 4y}{-4x + 3y^2}.$

CHAPITRE IV.

DES FONCTIONS PRIMITIVES.

124. On appelle *fonction primitive* d'une fonction donnée une fonction dont la fonction proposée est la dérivée. Nous démontrerons d'abord l'existence de la fonction primitive, qu'on puisse ou non l'exprimer au moyen des signes de l'algèbre.

Soit $y = f(x)$ la fonction proposée; représentons cette fonction par une courbe, comme nous l'avons expliqué au n° 93, en portant sur la ligne horizontale OX, à partir du point O, des longueurs égales aux diverses valeurs de la variable x, et élevant des perpendiculaires ou ordonnées égales aux valeurs correspondantes de y. Considérons l'aire ABMP comptée à partir d'une ordonnée fixe AB jusqu'à une ordonnée mobile MP; cette aire est une fonction de x; car, si l'on fait croître x, l'ordonnée MP s'éloignant, l'aire augmente; nous désignerons cette fonction par $F(x)$. Je vais démontrer que la fonction $F(x)$, ainsi définie, est la fonction primitive de la fonction proposée $f(x)$. Concevons, en effet, que l'on donne à x un accroissement $PP' = h$; l'accroissement k de la fonction $F(x)$ sera l'aire du trapèze curviligne MPP'M'; par les points M et M' menons les horizontales MD et M'E; on voit que l'aire du tra-



pèze curviligne est comprise entre celles des rectangles MPP'D et EPP'M'; ces rectangles ont pour mesure $MP \times h$, $M'P' \times h$; on a donc

$$MP \times h < k < M'P' \times h,$$

et, en divisant par h,

$$MP < \frac{k}{h} < M'P'.$$

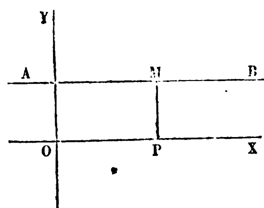
Quand h tend vers zéro, l'ordonnée M'P' devient égale à MP; donc la limite de $\frac{k}{h}$, ou la dérivée $F'(x)$, est égale à l'ordonnée MP, c'est-à-dire à $f(x)$. Ainsi la fonction proposée $f(x)$ est la dérivée de la fonction $F(x)$; et, réciproquement, la fonction $F(x)$ est la fonction primitive de $f(x)$.

Il résulte de là qu'une fonction continue quelconque a une fonction primitive, que l'on peut représenter par une aire plane. Si à la fonction primitive $F(x)$ on ajoute une constante arbitraire C, on aura encore une fonction primitive $F(x) + C$; car la constante ne donne rien dans la dérivée.

Nous verrons, par ce qui suivra, que l'addition de cette constante arbitraire donne toutes les fonctions primitives de la fonction proposée.

125. Démontrons d'abord que, lorsqu'une fonction a sa dérivée constamment nulle, cette fonction est constante.

Imaginons la fonction figurée par une ligne. Si l'on désigne par α l'angle que fait la tangente à la ligne en un point quelconque avec l'horizontale OX, nous savons (n° 93) que la dérivée de la fonction représente *tang* α. Puisque la dérivée est constamment



nulle, l'angle α est lui-même constamment nul. Ainsi la ligne en chacun de ses points a sa tangente horizontale; ce ne peut être qu'une ligne droite horizontale AB. L'ordonnée MP de chacun des points de cette ligne droite est constante; on en conclut que la fonction proposée a une valeur constante.

Mais il est bon de démontrer algébriquement cette proposition importante.

Soit $f(x)$ une fonction; en donnant à x l'accroissement h, nous avons (n° 112) la relation

$$f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon],$$

ε s'évanouissant avec h. Si la dérivée est constamment nulle, cette relation se réduit à

$$f(x+h)-f(x)=h\varepsilon.$$

Je considère deux valeurs quelconques x_0 et X de la variable x, X étant supposée plus grande que x_0; je partage l'intervalle $X-x_0$ en n parties égales, et j'appelle h chacune de ces parties. En appliquant la relation précédente à ces divers éléments, on a

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h)-f(x_0)=h\varepsilon_0,\\
&f(x_0+2h)-f(x_0+h)=h\varepsilon_1,\\
&f(x_0+3h)-f(x_0+2h)=h\varepsilon_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f(X)-f[x_0+(n-1)h]=h\varepsilon_{n-1},
\end{aligned}$$

chacune des quantités ε_0, ε_1, ... ε_{n-1} s'évanouissant avec h.

Si l'on ajoute toutes ces égalités, les quantités intermédiaires disparaissent et l'on trouve

$$f(X)-f(x_0)=h(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots..+\varepsilon_{n-1}).$$

Appelons ε la plus grande des quantités ε_0, ε_1, ... en valeur absolue; leur somme sera évidemment moindre que $n\varepsilon$, et le second membre plus petit que $nh\varepsilon$ ou que $(X - x_0)\varepsilon$, puisque nh égale $X - x_0$; on aura donc

$$f(X) - f(x_0) < (X - x_0)\varepsilon.$$

Imaginons maintenant que l'on partage l'intervalle constant $X - x_0$ en un nombre de parties de plus en plus grand; la grandeur h des parties diminuera indéfiniment; toutes les quantités ε_0, ε_1, ..., et par conséquent la plus grande d'entre elles ε, tendront simultanément vers zéro, et le produit $(X - x_0)\varepsilon$ s'évanouira. Il en résulte que la différence $f(X) - f(x_0)$ est nulle, c'est-à-dire que les valeurs $f(X)$ et $f(x_0)$ de la fonction pour deux valeurs quelconques de la variable sont égales; ainsi la fonction conserve toujours la même valeur : c'est une constante.

126. Soient maintenant deux fonctions $F(x)$ et $\varphi(x)$, ayant même dérivée $f(x)$, je dis que ces deux fonctions ne peuvent différer que par une constante. En effet, on a, par hypothèse,

$$\varphi'(x) = f(x),$$
$$F'(x) = f(x);$$

si l'on retranche ces deux égalités l'une de l'autre, il vient

$$\varphi'(x) - F'(x) = 0.$$

Mais $\varphi'(x) - F'(x)$ est la dérivée de la fonction $\varphi(x) - F(x)$; puisque cette dérivée est constamment nulle, la fonction est constante; donc

$$\varphi(x) - F(x) = C.$$

Nous avons dit (n° 124) que, lorsqu'on a trouvé une

fonction primitive $F(x)$ de la fonction proposée, et que l'on y ajoute une constante arbitraire, on obtient une nouvelle fonction primitive $F(x)+C$. Il résulte de ce qui précède que l'on forme ainsi toutes les fonctions primitives de la fonction proposée, puisque toute autre fonction primitive ne diffère de la première que par une constante. Cette fonction primitive $F(x)+C$, renfermant une constante arbitraire, s'appelle, pour cette raison, fonction primitive *générale* de la fonction proposée.

On peut déterminer la constante de manière que la fonction primitive ait une valeur donnée A pour une valeur donnée a de x; on posera

$$F(a)+C=A,$$

d'où

$$C=A-F(a).$$

Si l'on veut, par exemple, que la fonction primitive s'annule pour $x=a$, on posera

$$F(a)+C=0;$$

d'où

$$C=-F(a),$$

et la fonction primitive devient $F(x)-F(a)$.

La représentation géométrique de la fonction primitive montre bien que cette fonction renferme une constante arbitraire; car on peut compter l'aire à partir d'une ordonnée initiale AB quelconque (n° 124), et quand on change la position de cette ordonnée initiale, on modifie évidemment l'aire d'une quantité constante. Déterminer la constante de manière que la fonction primitive s'annule pour $x=a$, c'est compter l'aire à partir de l'ordonnée initiale qui correspond à $x=a$.

127. La recherche des fonctions primitives est une opération très-compliquée; nous nous bornerons aux cas les plus simples. Considérons d'abord une fonction entière

$$A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m;$$

sa fonction primitive est

$$\frac{A_0x^{m+1}}{m+1} + \frac{A_1x^m}{m} + \frac{A_2x^{m-1}}{m-1} + \ldots\ldots + \frac{A_{m-1}x^2}{2} + A_mx + C;$$

car, en prenant la dérivée de ce polynôme, on retrouve le polynôme proposé. Ainsi, *pour avoir la fonction primitive d'une fonction entière, on augmente tous les exposants d'une unité et on divise chaque terme par l'exposant ainsi augmenté*. Cette opération élève le degré d'une unité.

Par exemple, le polynôme

$$x^2 - 5x + 7$$

a pour fonction primitive générale

$$\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C.$$

Si l'on veut que la fonction primitive s'annule pour $x = 0$, on fera $C = 0$.

La même règle s'applique aux exposants quelconques.

Exemples.

1° $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

$F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$.

2° $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$.

$F(x) = - x^{-1} + C = - \frac{1}{x} + C$.

3° $f(x) = -\frac{2}{3} ax^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} bx^{-\frac{7}{3}} - 2dx^{-3}$.

$F(x) = ax^{-\frac{2}{3}} - bx^{-\frac{4}{3}} + dx^{-2} + C$.

128. Voici encore d'autres cas où l'on peut trouver immédiatement la fonction primitive :

1° $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = Lx + C$,

2° $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $F(x) = \text{arc tang} x + C$,

3° $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \text{arc sin} x + C$,

4° $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $F(x) = \text{arc cos} x + C$,

5° $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x + C$,

6° $f(x) = a^x$, $F(x) = \frac{a^x}{La} + C$,

7° $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x + C$,

8° $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x + C$,

9° $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \text{tang}\, x + C$,

10° $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\cot x + C$,

11° $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $F(x) = \text{séc}\, x + C$,

12° $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, $F(x) = -\text{coséc}\, x + C$.

Souvent le théorème sur les fonctions de fonctions permet de trouver la fonction positive.

1° $f(x) = \frac{1}{x+a}$, $F(x) = L(x+a) + C$,

2° $f(x) = \frac{1}{(x+a)^m} = (x+a)^{-m}$, $F(x) = \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C$,

3° $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\frac{\frac{1}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, $F(x) = \frac{1}{a}\text{arc tang}\frac{x}{a} + C$,

4° $f(x) = \frac{x}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{a^2+x^2}$, $F(x) = \frac{1}{2}L(a^2+x^2) + C$.

On voit ici que, le numérateur $2x$ étant la dérivée du dénominateur a^2+x^2, la fonction $\frac{2x}{a^2+x^2}$ est la dérivée de $L(a^2+x^2)$.

5° $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $F(x) = \sqrt{a^2+x^2} + C$,

6° $f(x) = e^{ax}$, $F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + C$,

7° $f(x) = \cos ax$, $F(x) = \frac{\sin ax}{a} + C$,

8° $f(x) = \frac{Lx}{x}$, $F(x) = \frac{1}{2}(Lx)^2 + C$,

9° $f(x) = \frac{1}{xLx}$, $F(x) = LLx + C$,

10° $f(x) = \frac{1}{x(Lx)^m}$, $F(x) = \frac{-1}{(m-1)(Lx)^{m-1}} + C$,

11° $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $F(x) = \text{arc tang}(e^x) + C$.

CHAPITRE V.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES.

Développement de L(1 + x).

129. La fonction $L(1+x)$ a pour dérivée $\frac{1}{1+x}$. En effectuant la division de 1 par $1+x$, et ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de x, on trouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots \mp x^{n-1} \pm \frac{x^n}{1+x},$$

d'où

$$\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots \mp x^{n-1}) = \pm \frac{x^n}{1+x}.$$

Le premier membre admet pour fonction primitive

$$L(1+x) - \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots \mp \frac{x^n}{n}\right).$$

Si l'on désigne cette fonction par $\pm\varphi(x)$, on a

$$\pm\varphi'(x) = \frac{1}{1-x} - (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots \mp x^{n-1}) = \pm\frac{x^n}{1+x},$$

ou plus simplement

$$\varphi'(x) = \frac{x^n}{1+x}.$$

Nous remarquons d'ailleurs que la fonction $\varphi(x)$, comme les deux fonctions dont elle est la différence, s'annule avec la variable x.

Supposons d'abord la variable x positive; la quantité $\frac{x^n}{1+x}$ étant positive et inférieure à x^n, on aura

$$\varphi'(x) > 0,$$
$$\varphi'(x) - x^n < 0.$$

Ces deux expressions admettent respectivement pour fonctions primitives

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

La fonction $\varphi(x)$, ayant sa dérivée positive, va en croissant avec x; comme elle s'évanouit pour $x = 0$, elle prend des valeurs positives croissantes, quand x croît à partir de 0. La fonction $\varphi(x) - \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ayant sa dérivée négative, va au contraire en décroissant quand x croît; comme elle s'évanouit aussi avec x, elle prend des valeurs négatives, quand x croît à partir de 0; on a donc

$$\varphi(x) - \frac{x^{n-1}}{n+1} < 0,$$

ou

$$\varphi(x) < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs positives de la variable x, la fonction $\varphi(x)$ a une valeur positive inférieure à $\frac{x^{n+1}}{n+1}$. Si l'on désigne par θ une certaine fraction moindre que l'unité, on pourra représenter la valeur de $\varphi(x)$ par $\frac{\theta x^{n+1}}{n+1}$, et l'on aura

$$L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\mp\frac{x^n}{n}\pm\frac{\theta x^{n+1}}{n+1}.$$

Cette égalité est vraie, quelle que soit la valeur positive attribuée à x. Supposons maintenant que la valeur de x soit inférieure ou au plus égale à l'unité; si l'on fait augmenter n indéfiniment, le terme complémentaire $\frac{\theta x^{n+1}}{n+1}$ tend vers zéro; on en conclut que la somme des n premiers termes de la série

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$$

tend vers la limite $L(1+x)$; on obtient ainsi le développement de $L(1+x)$ en série convergente

$$(1)\qquad L(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots$$

pour toutes les valeurs positives de x inférieures ou égales à l'unité.

130. Donnons maintenant à la variable une valeur négative $-x$ comprise entre o et -1, et proposons-nous de développer la fonction $-L(1-x)$, dans laquelle x a une valeur positive inférieure à l'unité. Cette fonction a pour dérivée $\frac{1}{1-x}$, expression qui se développe de la manière suivante

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x};$$

on en déduit

$$\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1})=\frac{x^n}{1-x}.$$

Le premier membre admet pour fonction primitive

$$-L(1-x)-\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n}\right).$$

Si l'on désigne cette fonction par $\varphi(x)$, on a

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}),$$

ou plus simplement

$$\varphi'(x)=\frac{x^n}{1-x}.$$

Nous remarquons d'ailleurs que la fonction $\varphi(x)$ s'annulle avec la variable x.

Désignons par α une quantité très-petite, mais déterminée, et supposons que x varie de 0 à $1-\alpha$; la valeur de la fonction $\frac{x^n}{1-x}$ sera positive et inférieure à $\frac{x^n}{\alpha}$ (car le dénominateur $1-x$ est plus grand que α), et l'on aura

$$\varphi'(x)>0,$$
$$\varphi'(x)-\frac{x^n}{\alpha}<0.$$

Ces deux expressions admettent respectivement pour fonctions primitives

$$\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha}.$$

En raisonnant comme précédemment, on voit que la fonction $\varphi(x)$, ayant sa dérivée positive et s'évanouissant avec x, prend des valeurs positives croissantes quand x croît de 0 à $1-\alpha$, et que la fonction $\varphi(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha}$, ayant sa dé-

rivée négative et s'évanouissant avec x prend des valeurs négatives. Ainsi la fonction $\varphi(x)$ a une valeur positive inférieure à $\frac{x^{n+1}}{(n+1)\alpha}$; on peut la représenter par $\frac{\theta x^{n+1}}{(n+1)\alpha}$, en désignant par θ une fraction, et l'on a

$$-\mathrm{L}(1-x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n}+\frac{\theta x^{n+1}}{(n+1)\alpha},$$

pour toutes les valeurs de x inférieures à $1-\alpha$. Si l'on fait augmenter n indéfiniment, le terme complémentaire tend vers zéro; d'où l'on conclut que la somme des n premiers termes de la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots$$

tend vers la limite $-\mathrm{L}(1-x)$. On obtient de cette manière le développement de la fonction $-\mathrm{L}(1-x)$ en série convergente

$$-\mathrm{L}(1-x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots$$

pour toutes les valeurs de x inférieures à $1-\alpha$. Comme la quantité α, dont nous avons fait usage dans la démonstration, peut être prise aussi petite que l'on veut, le développement a lieu pour toutes les valeurs de x inférieures à l'unité. On a ainsi

$$(2) \qquad \mathrm{L}(1-x)=-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots\ldots$$

pour toutes les valeurs de x inférieures à l'unité.

Remarquons que l'on déduit l'égalité (2) de l'égalité (1), en changeant x en $-x$. La série (1) représente donc la fonction $\mathrm{L}(1+x)$, quand x varie de -1 exclusivement à $+1$ inclusivement.

Calcul des logarithmes népériens.

131. De la série précédente, on déduit des séries qui servent au calcul des tables de logarithmes. Proposons-nous de trouver une série donnant la différence entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs n et $n+1$. Puisque

$$L(n+1) - Ln = L\frac{n+1}{n} = L\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

si dans la série (1) on remplace x par la fraction $\frac{1}{n}$, on a

$$L(n+1) - Ln = \frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + \frac{1}{3.n^3} - \ldots\ldots$$

Mais cette série ne converge pas assez rapidement, et il faudrait prendre un grand nombre de termes pour avoir les logarithmes avec une certaine approximation.

On arrive à une série beaucoup plus rapidement convergente de la manière suivante : Si l'on retranche l'une de l'autre les deux séries obtenues précédemment

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$
$$L(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\ldots,$$

les termes de degré pair se retranchent, ceux de degré impair s'ajoutent, et l'on a

$$L(1+x) - L(1-x) = L\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right).$$

Posons maintenant

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n},$$

d'où

$$x = \frac{1}{2n+1},$$

et remplaçons x par sa valeur, nous obtiendrons la série

$$(3) \qquad \mathrm{L}\frac{n+1}{n} = \mathrm{L}(n+1) - \mathrm{L}n$$

$$= 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\ldots\right],$$

qui converge d'autant plus rapidement que le nombre n est plus grand.

132. C'est au moyen de la série (3) que l'on calcule les logarithmes népériens.

En faisant $n = 1$ dans cette série, on a

$$\mathrm{L}2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \ldots\ldots$$

On commencera par réduire en décimales les fractions $\frac{2}{3}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^5}, \ldots\ldots$, en divisant successivement par 9; puis on les divisera par les nombres impairs 1, 3, 5, 7, ... Les dix premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$\mathrm{L}2 = 0{,}69314\,71806.$$

Si dans la série (3) on fait $n = 2$, on a

$$\mathrm{L}3 - \mathrm{L}2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3.5^3} + \frac{2}{5.5^5} + \ldots\ldots$$

On abrége le calcul en remarquant que diviser par 25 revient à diviser par 100 et à multiplier par 4. Les sept premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L3 = 1,09861\ 22887.$$

On obtient L4 en doublant L2, d'où

$$L4 = 1,38629\ 43611.$$

On calculera ensuite L5 par la série

$$L5 - L4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \ldots\ldots;$$

on obtient les fractions $\frac{2}{9}, \frac{2}{9^3}, \frac{2}{9^5}, \ldots\ldots$, en divisant par 3 les fractions déjà calculées $\frac{2}{3}, \frac{2}{3^6}, \frac{2}{3^9}, \ldots\ldots$ Les cinq premiers termes donnent, avec dix décimales exactes,

$$L5 = 1,60943\ 79124.$$

On obtiendra L6 en ajoutant L3 et L2. On calculera L7 par la série en faisant $n = 6$, et ainsi de suite indéfiniment.

Calcul des logarithmes vulgaires.

133. Quand on veut calculer les logarithmes vulgaires, il faut d'abord chercher le module. Pour cela, on calcule le logarithme népérien de 2, au moyen de la série

$$L2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3.3^3} + \frac{2}{5.3^5} + \frac{2}{7.3^7} + \ldots\ldots,$$

comme nous l'avons expliqué dans le numéro précédent, ce qui donne

$$L2 = 0,69314\ 71806.$$

En doublant ce logarithme, on obtient le logarithme népérien de 4,

$$L4 = 1,38629\ 43611.$$

On détermine ensuite le logarithme népérien de 5 au moyen de la série

$$L5 - L4 = \frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \ldots\ldots,$$

en remarquant que ces nouvelles fractions se déduisent de celles qui ont servi au calcul de L2, comme nous l'avons expliqué.

Une fois qu'on a trouvé L2 et L5, l'addition de ces deux logarithmes donne

$$L10 = 2,30258\ 50930.$$

On sait que le module M des logarithmes vulgaires est égal à $\frac{1}{L10}$ (n° 87) ; divisant 1 par L10, on aura la valeur de ce module

$$M = 0,43429\ 44819.$$

En le doublant, on a

$$2M = 0,86858\ 89638.$$

On obtient les logarithmes vulgaires en multipliant par le module les logarithmes népériens. La série (4) devient ainsi

$$(4)\qquad \log(n+1) - \log n = 2M\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\ldots\right].$$

C'est cette série que l'on emploiera pour calculer les logarithmes vulgaires, en séparant les termes et l'écrivant sous la forme

$$(5)\quad \log(n+1) - \log n = \frac{2M}{2n+1} + \frac{2M}{5(2n+1)^3} + \frac{2M}{3(2n+1)^5} + \ldots\ldots$$

On obtiendra le logarithme vulgaire de 2, en multipliant par M le logarithme népérien de 2 qui a servi à trouver le module. On calculera log 3 par la série

$$\log 3 - \log 2 = \frac{2M}{5} + \frac{2M}{3.5^3} + \frac{2M}{5.5^5} + \ldots\ldots$$

On calculera d'abord les fractions $\frac{2M}{5}, \frac{2M}{5^3}, \frac{2M}{5^5}, \ldots\ldots$ en divisant successivement par 25, plus simplement en multipliant par 4 et divisant par 100 ; on divisera ces fractions respectivement par 1, 3, 5. ..... ; en ajoutant les résultats, on aura log 3. On aura log 4 en doublant log 2. On obtiendra log 5, et en multipliant par M le logarithme népérien de 5 qui a servi à trouver le module. On trouvera log 6 en ajoutant log 2 et log 3. On calculera log 7 par la série

$$\log 7 - \log 6 = \frac{2M}{13} + \frac{2M}{3.13^3} + \frac{2M}{5.13^5} + \ldots\ldots$$

On aura log 8 en ajoutant log 4 et log 2, log 9 en doublant log 3 ; on sait d'ailleurs que log 10 = 1. On calculera log 11 par la série, et ainsi de suite indéfiniment.

La série (5) convergeant de plus en plus à mesure que l'on s'élève dans l'échelle des nombres entiers, les calculs deviendront bientôt extrêmement rapides. On aura, par exemple, le logarithme de 101 avec huit décimales exactes au moyen de deux termes seulement

$$\log 101 - 2 = \frac{2M}{201} + \frac{2M}{3.201^3}.$$

On calculera d'abord le premier terme en divisant le nombre connu 2M par 201 ; puis on déduira le second

terme du premier en divisant celui-ci par 3.201^2 ou par 121203.

Le premier terme de la série suffira pour le logarithme de 1001,

$$\log 1001 - 3 = \frac{2M}{2001},$$

et à plus forte raison au delà.

Développement de la fonction arc tang x.

134. Afin de préciser le sens de la fonction *arc tang x*, nous supposerons qu'elle s'évanouit avec x et qu'elle varie ensuite d'une manière continue avec cette variable. La méthode qui nous a donné le développement de $L(1+x)$ nous conduira aussi au développement de la fonction *arc tang x*.

La fonction *arc tang x* a pour dérivée $\frac{1}{1+x^2}$. Par la division, cette dérivée se développe de la manière suivante,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots \mp x^{2n-2} \pm \frac{x^{2n}}{1+x^2},$$

d'où

$$\frac{1}{1+x^2} - (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots \mp x^{2n-2}) = \pm \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

Le premier membre admet pour fonction primitive

$$\text{arc tang}\, x - \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots \mp \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right).$$

En désignant cette fonction par $\pm\varphi(x)$, on a

$$\pm\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}-(1-x^2+x^4-x^6+\ldots\mp x^{2n-2})=\pm\frac{x^{2n}}{1+x^2},$$

ou plus simplement

$$\varphi'(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

D'ailleurs, la fonction $\varphi(x)$ s'annule avec la variable x.

La quantité $\frac{x^{2n}}{1+x^2}$ étant positive et inférieure à x^2, on a les inégalités

$$\varphi'(x)>0,$$
$$\varphi'(x)-x^{2n}<0.$$

La fonction $\varphi(x)$, ayant sa dérivée positive, croît avec x; comme elle s'évanouit pour $x=0$, elle prend des valeurs positives croissantes, quand x croît à partir de zéro. La fonction $\varphi(x)-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, ayant sa dérivée négative, décroît au contraire quand x croît; comme elle s'évanouit aussi avec x, elle prend des valeurs négatives quand x croit à partir de zéro. On a donc, pour toutes les valeurs positives de x,

$$\varphi(x)-\frac{x^{2n+1}}{2n+1}<0,$$

ou

$$\varphi(x)<\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Ainsi la fonction $\varphi(x)$ a une valeur positive inférieu re $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, et l'on pourra écrire

$$\varphi(x)=\frac{\theta x^{2n+1}}{2n+1},$$

en désignant par θ une quantité positive plus petite que l'unité. On en déduit

$$\text{arc tang } x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots \mp \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \pm \frac{\theta x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Supposons maintenant que la variable x soit inférieure ou au plus égale à l'unité*; si l'on fait augmenter n indéfiniment, le terme complémentaire $\frac{\theta x^{2n+1}}{2n+1}$ tend vers zéro; on en conclut que la somme des n premiers termes de la série

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots$$

tend vers la limite *arc tang x*; on obtient ainsi le développement de *arc tang x* en série convergente

$$\text{(6)} \qquad \text{arc tang} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

pour toutes les valeurs de x inférieures ou égales à l'unité.

Cette série convient aussi aux valeurs négatives de x comprises entre o et — 1, puisque les deux membres changent de signe avec x, en conservant la même valeur absolue. Ainsi la série (6) est convergente et représente la fonction *arc tang x*, quand x varie de — et + 1 inclusivement.

Calcul du rapport de la circonférence au diamètre.

135. Nous avons obtenu le développement de la fonction *arc tang x* en série convergente

$$(6) \qquad \text{arc tang}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

pour toutes les valeurs de x inférieures ou égales à l'unité. Cette série permet de calculer la longueur d'un arc dont on connaît la tangente; il en résulte plusieurs manières de déterminer le rapport de la circonférence au diamètre.

1° L'arc, qui a pour tangente l'unité, est la moitié du quadrant ou $\frac{\pi}{4}$. En faisant $x = 1$ dans la série, on a donc

$$(7) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots$$

Mais cette série ne converge pas assez rapidement et il faudrait un trop grand nombre de termes pour obtenir π avec quelque approximation. On a recours à d'autres procédés.

2° En appelant a l'arc qui a pour tangente $\frac{1}{2}$, on a la série

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \ldots\ldots,$$

qui converge plus rapidement que la précédente, et qui donne une portion a du demi-quadrant $\frac{\pi}{4}$. Pour avoir la partie complémentaire, je pose $b = \frac{\pi}{4} - a$, d'où

$$\text{tang}\, b = \frac{\text{tang}\,\frac{\pi}{4} - \text{tang}\, a}{1 + \text{tang}\,\frac{\pi}{4}\,\text{tang}\, a} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi l'arc b a pour tangente $\frac{1}{3}$, et se développe de la manière suivante

$$b = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\ldots$$

En ajoutant les deux arcs a et b, on a

$$(8) \qquad \frac{\pi}{4} = a + b = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \ldots\ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\ldots\right)\ldots\ldots$$

De cette manière, l'arc $\frac{\pi}{4}$ est donné par la somme de deux séries.

3° Partons maintenant de l'arc qui a pour tangente $\frac{1}{3}$, et appelons a cet arc,

$$a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\ldots$$

En doublant cet arc, on a

$$\text{tang}\, 2a = \frac{2\,\text{tang}\, a}{1 - \text{tang}^2 a} = \frac{3}{4}.$$

L'arc $2a$ est encore plus petit que $\frac{\pi}{4}$; j'appelle b la différence $\frac{\pi}{4} - 2a$, d'où

$$\text{tang}\, b = \frac{1 - \text{tang}\, 2a}{1 + \text{tang}\, 2a} = \frac{1}{7}.$$

L'arc b qui a pour tangente $\frac{1}{7}$ est donné par la série

$$b = \frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \ldots\ldots$$

On a donc

$$(9) \qquad \frac{\pi}{4} = 2a + b = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \ldots\ldots\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3.7^3} + \frac{1}{5.7^5} - \ldots\ldots\right).$$

4° On obtient des séries très-rapidement convergentes en partant de l'arc a qui a pour tangente $\frac{1}{5}$,

$$a = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots\ldots$$

Si l'on double cet arc, on a

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}.$$

En doublant encore une fois, on a

$$\operatorname{tang} 4a = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Cette dernière tangente étant un peu plus grande que l'unité, l'arc $4a$ est un peu plus grand que $\frac{\pi}{4}$; appelons b la différence $4a - \frac{\pi}{4}$,

et calculons la tangente de cet arc,

$$\operatorname{tang} b = \frac{\frac{120}{119} - 1}{\frac{120}{119} + 1} = \frac{1}{239}.$$

L'arc très-petit b, dont la tangente est $\frac{1}{239}$, sera donné par la série

$$b = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\ldots$$

et l'on aura

$$(10)\quad \frac{\pi}{4} = 4a - b = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\ldots\right),$$

d'où

$$(11)\quad \pi = 16a - 4b = \frac{16}{5} - \frac{16}{3.5^3} + \frac{16}{5.5^5} - \ldots\ldots - \left(\frac{4}{239} - \frac{4}{3.239^3} + \ldots\ldots\right).$$

Ces deux séries convergent très-rapidement, surtout la seconde. Aussi cette dernière formule est-elle de beaucoup préférable à celles que nous avons données précédemment.

136. Voici le calcul de π avec 16 décimales exactes, au moyen de la formule (11).

Calcul de 16a.

$$\frac{16}{5}=3{,}2$$
$$\frac{16}{5^3}=0{,}128$$
$$\frac{16}{5^5}=0{,}00512$$
$$\frac{16}{5^7}=0{,}00020\ 48$$
$$\frac{16}{5^9}=0{,}00000\ 8192$$
$$\frac{16}{5^{11}}=0{,}00000\ 03276\ 8$$
$$\frac{16}{5^{13}}=0{,}00000\ 00131\ 072$$
$$\frac{16}{5^{15}}=0{,}00000\ 00005\ 24288$$
$$\frac{16}{5^{17}}=0{,}00000\ 00000\ 20971\ 52$$
$$\frac{16}{5^{19}}=0{,}00000\ 00000\ 00838\ 86$$
$$\frac{16}{5^{21}}=0{,}00000\ 00000\ 00033\ 55$$

$$\frac{16}{5}=3{,}2$$
$$\frac{16}{5.5^5}=0{,}00102\ 4$$
$$\frac{16}{9.5^9}=0{,}00000\ 09102\ 22222\ 22$$
$$\frac{16}{13.5^{13}}=0{,}00000\ 00010\ 08246\ 15$$
$$\frac{16}{17.5^{17}}=0{,}00000\ 00000\ 01233\ 62$$
$$\frac{16}{21.5^{21}}=0{,}00000\ 00000\ 00001\ 60$$
$$3{,}20102\ 49112\ 31703\ 59$$

$$\frac{16}{3.5^3}=0{,}04266\ 66666\ 66666\ 67$$
$$\frac{16}{7.5^7}=0{,}00002\ 92571\ 42857\ 14$$
$$\frac{16}{11.5^{11}}=0{,}00000\ 00297\ 89090\ 91$$
$$\frac{16}{15.5^{15}}=0{,}00000\ 00000\ 34952\ 53$$
$$\frac{16}{19.5^{19}}=0{,}00000\ 00000\ 00044\ 15$$
$$0{,}04269\ 59536\ 33611\ 40$$
$$16a=3{,}15832\ 89575\ 98092\ 19$$

Calcul de $4b$.

$$\frac{4}{239}=0{,}01673\ 64016\ 73640\ 17$$
$$\frac{4}{239^3}=0{,}00000\ 02929\ 99101\ 44$$
$$\frac{4}{239^5}=0{,}00000\ 00000\ 05129\ 45$$

$$\frac{4}{239}=0{,}01673\ 64016\ 73640\ 17$$
$$\frac{4}{5.239^5}=0{,}00000\ 00000\ 01025\ 89$$
$$0{,}01673\ 64016\ 74666\ 06$$
$$\frac{4}{3.239^3}=0{,}00000\ 00976\ 66367\ 15$$
$$4b=0{,}01673\ 63040\ 08298\ 91$$

Calcul de π.

$$16a=3{,}15832\ 89575\ 98092\ 19$$
$$4b=0{,}01673\ 63040\ 08298\ 91$$
$$\pi=3{,}14159\ 26535\ 89793\ 28$$

Il faut prendre onze termes dans la première série, trois dans la seconde. Les puissances impaires de $\frac{1}{5}$ se déduisent les unes des autres en divisant par 25, c'est-à-dire en multipliant par 4 et divisant par 100. Nous avons fait le calcul avec 17 décimales; mais on ne peut pas compter sur la dernière décimale que l'on supprimera; on aura donc π avec seize décimales exactes

$$\pi=3{,}14159\ 26535\ 89793\ 2.$$

Développement des fonctions en séries.

137. Nous avons effectué (n° 97) le développement de $f(x_0+h)$ suivant les puissances entières et croissantes de h, quand la fonction est entière et nous avons trouvé

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$+f^{(m)}(x_0)\frac{h^m}{1.2.\ldots\ldots m},$$

m étant le degré de la fonction. Le développement s'arrête à la dérivée d'ordre m; les dérivées suivantes sont nulles. La même forme de développement s'applique à une fonction continue quelconque; mais alors la suite se prolonge indéfiniment et constitue une série.

Supposons que la fonction $f(x)$ reste finie et continue, ainsi que ses $n+1$ premières dérivées, quand x varie de x_0 à x_0+h. Considérons le polynôme

$$f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots+f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2.\ldots\ldots n},$$

du degré n par rapport à h, et représentons par

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.\ldots\ldots(n+1)}\mathrm{R}$$

la différence qui existe entre $f(x_0+h)$ et ce polynôme, nous aurons

$$(1)\quad f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2.\ldots.n}+\frac{h^{n+1}}{1.2.\ldots.(n+1)}\mathrm{R}.$$

Si l'on pose $x_1=x_0+h$, d'où $x_1-x_0=h$, et si l'on fait passer tous les termes dans le premier membre, on écrira

$$(2)\quad fx(_1)-f(x_0)-\frac{x_1-x_0}{1}f'(x_0)-\frac{(x_1-x_0)^2}{1.2}f''(x_0)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots-\frac{(x_1-x_0)^n}{1.2\ldots\ldots n}f^n(x_0)-\frac{(x_1-x_0)^{n+1}}{1.2\ldots.(n+1)}\mathrm{R}=0.$$

La quantité inconnue R dépend des deux quantités x_0 et x_1.

Considérons la fonction

$$(3)\quad \varphi(x) = f(x_1) - f(x) - \frac{x_1 - x}{1} f'(x) - \frac{(x_1 - x)^2}{1\,.\,2} f''(x) - \ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{(x_1 - x)^n}{1\,.\,2\,\ldots\ldots n} f^n(x) - \frac{(x_1 - x)^{n+1}}{1\,.\,2\,\ldots\ldots(n+1)} \mathrm{R}.$$

Pour former cette fonction nous avons remplacé x_0 par la variable x dans l'expression (2), excepté dans la quantité R que nous laissons constante. Pour abréger, nous désignerons cette fonction par $\varphi(x)$; si l'on en prend la dérivée, on remarque que les termes se détruisent deux à deux; les deux derniers termes subsistent seuls, et l'on a

$$\varphi'(x) = -\frac{(x_1 - x)^n}{1\,.\,2\,\ldots\ldots n} f^{n+1}(x) + \frac{(x_1 - x)^n}{1\,.\,2\,\ldots\ldots n} \mathrm{R},$$

ou plus simplement

$$(4)\qquad \varphi'(x) = \frac{(x_1 - x)^n}{1\,.\,2\,\ldots\ldots n}[\mathrm{R} - f^{n+1}(x)].$$

D'après les hypothèses faites, la fonction $\varphi(x)$ et sa dérivée $\varphi'(x)$ restent finies et continues quand x varie de x_0 à x_1. Pour $x = x_0$, la fonction $\varphi(x)$ se réduit à l'expression (2), qui est égale à zéro; pour $x = x_1$, les deux premiers termes se détruisent, les suivants deviennent nuls, et la fonction est aussi égale à zéro. Ainsi, quand x varie de x_0 à x_1, la fonction $\varphi(x)$ part de zéro pour revenir à zéro; comme elle reste finie et continue, elle passe par un maximum en valeur absolue; la dérivée $\varphi'(x)$ change donc de signe, et comme elle reste elle-même finie et continue, elle change de signe en passant par zéro. On en conclut que la dérivée

s'annule pour une valeur de x comprise entre x_0 et x_1, c'est-à-dire entre x_0 et x_0+h; cette valeur de x, qui annule la dérivée, peut être représentée par $x_0+\theta h$, θ étant une fraction plus petite que l'unité, et l'on a $\varphi'(x_0+\theta h)=0$. On en déduit, en vertu de l'équation (4),

$$R = f^{n+1}(x_0+\theta h).$$

L'égalité (1) devient ainsi

$$(5)\quad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1} + f''(x_0)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2\ldots n} + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)}f^{n+1}(x_0+\theta h).$$

Lorsque le terme complémentaire tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, la formule donne naissance à une série convergente; c'est la série de Taylor.

138. On peut obtenir le terme complémentaire sous une forme plus générale. Si l'on représente le terme complémentaire par

$$\frac{h^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)}R,$$

p étant un nombre entier quelconque, on a, comme précédemment,

$$f(x_1) - f(x_0) - \frac{x_1-x_0}{1}f'(x_0) - \frac{(x_1-x_0)^2}{1.2}f''(x_0) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{(x_1-x_0)^n}{1.2\ldots n}f^n(x_0) - \frac{(x_1-x_0)^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)}R = 0.$$

La fonction

$$\varphi(x) = f(x_1) - f(x) - \frac{x_1-x}{1}f'(x) - \frac{(x_1-x)^2}{1.2}f''(x) - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{(x_1-x)^n}{1.2\ldots n}f^n(x) - \frac{(x_1-x)^{p+1}}{1.2\ldots n(p+1)}R$$

s'annule encore pour $x = x_0$ et $x = x_1$; sa dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{(x_1 - x)^p}{1 \cdot 2 \ldots . n}[\mathrm{R} - (x_1 - x)^{n-p} f^{n+1}(x)];$$

s'annule par conséquent pour une valeur intermédiaire $x_0 + \theta h$; on en déduit

$$\mathrm{R} = h^{n-p}(1 - \theta)^{n-p} f^{n+1}(x_0 + \theta h),$$

et par suite le terme complémentaire

$$\frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n(p+1)}(1 - \theta)^{n-p} f^{n+1}(x_0 + \theta h).$$

Le nombre entier p est arbitraire. Si l'on fait $p = n$, on retrouve la première forme; si l'on fait $p = 0$, on obtient une seconde forme

$$\frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n}(1 - \theta)^n f^{n+1}(x_0 + \theta h),$$

qui est souvent utile dans les applications *.

139. De la formule (5), dans laquelle on remplace x_0 par o et h par x, on déduit

$$(6) \qquad f(x) = f(o) + f'(o)\frac{x}{1} + f''(o)\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

$$+ f^n(o)\frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots . (n+1)} f^{n+1}(\theta x).$$

On peut aussi mettre le terme complémentaire sous la forme

$$\frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n}(1 - \theta)^n f^{n+1}(\theta x).$$

* L'ingénieuse démonstration que nous avons donnée de la série de Taylor est due à M. Todhunter. M. Rouché l'a perfectionnée de manière à obtenir à la fois les deux formes du reste.

Lorsque le terme complémentaire tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, la fonction est développée en série convergente, suivant les puissances entières et croissantes de x.

Appliquons cette formule au développement de la fonction e^x. Toutes les dérivées de cette fonction sont égales à la fonction elle-même e^x et se réduisent par conséquent à l'unité pour $x = 0$; on a donc

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots\ldots n} + \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)} \times e^{\theta x}.$$

La série étant convergente, quelle que soit la valeur attribuée à x, comme nous l'avons remarqué au n° 61, la fraction $\frac{x^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$ tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment; d'ailleurs $e^{\theta x}$ conserve une valeur finie; le terme complémentaire tend donc vers zéro, et l'on a le développement de e^x en série convergente pour toutes les valeurs de x positives ou négatives,

$$(7) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

On obtient de la même manière le développement des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ en séries convergentes pour toutes les valeurs de x

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

LIVRE VI.

THÉORIE DES ÉQUATIONS.

CHAPITRE PREMIER.

CALCUL DES QUANTITÉS IMAGINAIRES.

Définition.

140. Nous avons expliqué, dans la première partie de l'*Algèbre* (liv. III, chap. II), comment la résolution de l'équation du second degré conduit à des expressions de la forme $a + b\sqrt{-1}$, auxquelles on a donné le nom de *quantités imaginaires*. Si l'on représente par la lettre i le symbole $\sqrt{-1}$; les quantités imaginaires s'écriront sous la forme $a + bi$, les lettres a et b désignant des quantités réelles positives ou négatives.

Soit r un nombre positif, α un angle, on peut toujours poser

$$a = r\cos\alpha, \qquad b = r\sin\alpha.$$

En ajoutant les carrés, on en déduit

$$(1) \qquad r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

et par suite

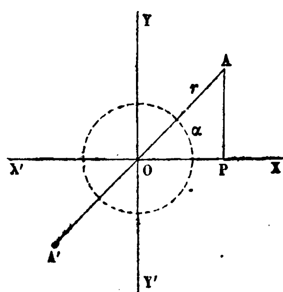
$$(2) \qquad \cos\alpha = \frac{a}{r}, \qquad \sin\alpha = \frac{b}{r}.$$

De cette manière, la quantité imaginaire $a+bi$ se met sous la forme

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Le nombre positif r s'appelle le *module*, l'angle α l'*argument* de la quantité imaginaire. Le module r donné par l'équation (1) a une valeur parfaitement déterminée. Mais l'argument α peut recevoir une infinité de valeurs. L'angle α étant donné par son sinus et son cosinus, d'après les équations (2), a une valeur et une seule de o à 2π; on peut ensuite augmenter ou diminuer cet angle d'un multiple quelconque de 2π; de sorte que si l'on représente par α_0 la première valeur de α, et par k un nombre entier quelconque, positif ou négatif, toutes les valeurs de α seront comprises dans la formule $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$.

141. Dans un plan, marquons un point fixe O et traçons une droite fixe OX passant par ce point. On peut figurer la quantité imaginaire par une longueur OA égale à son module r portée dans une direction qui fasse avec la droite fixe OX un angle égal à son argument α. On compte l'angle α à partir de OX en tournant dans un sens convenu, par exemple, de OX vers OY.



Cette représentation des quantités imaginaires a une grande importance en mathématique. Elle permet de suivre la variation de ces grandeurs et constitue un instrument puissant pour l'étude des propriétés des fonctions.

Si l'on fait varier l'angle α de o à 2π, la droite OA tourne autour du point O, à partir de la portion OX, et décrit tout le plan.

Les quantités réelles sont des cas particuliers des quantités imaginaires. Quand $\alpha = 0$, la quantité imaginaire $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ devient une quantité réelle positive r; elle est figurée par une longueur égale à r portée sur l'axe OX dans le sens OX. Quand $\alpha = \pi$, la quantité imaginaire devient une quantité réelle négative $-r$; elle est figurée par une longueur égale à son module r portée sur l'axe fixe, dans le sens inverse OX'.

Quand $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la quantité imaginaire, qui se réduit à ri, est figurée par une longueur égale à r, portée sur la perpendiculaire OY à l'axe OX. Qnand $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, la quantité imaginaire, qui se réduit à $-ri$, est figurée par une longueur égale à r portée sur la perpendiculaire, mais dans le sens inverse OY'.

En général, quand on ajoute π à l'argument, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ changeant de signe, la quantité imaginaire $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ change de signe. Ainsi deux quantités imaginaires égales et de signes contraires sont figurées par deux longueurs égales OA et OA' portées en sens inverse l'une de l'autre.

Du point A abaissons une perpendiculaire AP sur l'axe X'X, on a

$$a = r\cos\alpha = \mathrm{OP}, \qquad b = r\sin\alpha = \mathrm{PA}.$$

On voit par là que la partie réelle a de la quantité imaginaire OA est égale à sa projection OP sur l'axe fixe OX et le coefficient b de i à sa projection PA sur l'axe perpendiculaire OY. Écrire la quantité imaginaire sous la forme $a + bi$ revient à remplacer la ligne droite OA par la ligne brisée OPA.

142. On estime la grandeur d'une quantité imaginaire par la longueur de la droite OA qui la représente, c'est-à-dire par le module de la quantité imaginaire. Lorsque le module est petit, on dit que la quantité imaginaire est petite. Lorsque le module devient nul, on dit que la quantité imaginaire elle-même devient nulle. Puisque le module r est égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$, pour que le module soit nul, il est nécessaire et il suffit que les deux quantités réelles a et b soient nulles séparément.

Deux quantités imaginaires égales sont dites égales, lorsqu'elles sont représentées par la même droite OA dans la même direction, c'est-à-dire lorsque leurs modules sont égaux et que leurs arguments sont égaux ou diffèrent d'un nombre entier de circonférences. Il est clair que si deux quantités imaginaires $a + bi$, $a' + b'i$ sont égales, on a séparément $a = a'$, $b = b'$.

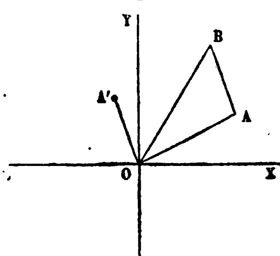
Addition.

143. On a étendu aux quantités imaginaires les règles ordinaires du calcul algébrique, comme si la lettre i désignait une quantité réelle, en convenant de remplacer ensuite dans le résultat i^2 par -1.

Proposons-nous d'abord d'additionner deux quantités imaginaires $a + bi$, $a' + b'i$. On a, en groupant les parties réelles et les parties imaginaires,

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$$

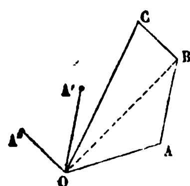
Si l'on figure les deux quantités imaginaires proposées par des grandeurs géométriques OA, OA', comme nous l'avons expliqué, il est facile de voir que l'addition consiste à porter ces deux longueurs l'une à la suite de l'autre, chacune dans sa direction. A partir du point A, extrémité de la grandeur OA, menons une droite AB égale et parallèle à OA', et joignons OB ; la droite OB représentera la somme des deux quantités imaginaires. Car la projection de la ligne droite OB sur chacun des axes OX et OY étant égale à la somme des projections des deux parties de la ligne brisée OAB, les deux projections de la ligne OB sont égales à $a + a'$ et à $b + b'$. Cette droite figure donc la quantité imaginaire



$$(a + a') + (b + b')i.$$

Nous remarquons que dans le triangle OAB la longueur du côté OB est plus petite que la somme des deux autres côtés OA et AB, et plus grande que leur différence. Il en résulte que *le module de la somme de deux quantités imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces deux quantités et plus grand que leur différence.*

Ce que nous venons de dire s'étend à l'addition d'un nombre quelconque de quantités imaginaires. Soit à additionner trois quantités imaginaires figurées par les grandeurs géométriques OA, OA', OA''; à partir du point A menons une droite AB égale et parallèle à OA', et, à partir du point B, une droite BC égale et parallèle à OA''; la



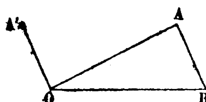
droite OB étant la somme des deux premières quantités, la droite OC sera la somme des deux quantités OB et OA″, et par conséquent la somme des trois quantités proposées. La droite OC étant moindre que la ligne brisée OABC, il est évident que *le module de la somme de plusieurs quantités imaginaires est plus petit que la somme des modules de ces quantités.*

Soustraction.

144. La soustraction n'offre aucune difficulté. D'une quantité imaginaire $a+bi$ retrancher une quantité imaginaire $a'+b'i$, c'est trouver une troisième quantité imaginaire qui, ajoutée à la seconde, reproduise la première. La différence cherchée est

$$(a-a')+(b-b')i.$$

Soient OA et OA′ les deux grandeurs géométriques qui figurent les quantités géométriques proposées. A la droite OA ajoutons une droite AB égale et parallèle à OA′, mais de sens contraire; la droite OB figurera la différence cherchée; car si à cette quantité OB on ajoute OA′ ou BA, on reproduit OA.



Multiplication.

145. En effectuant le produit de deux quantités imaginaires $a+bi$, $a'+b'i$, d'après la règle ordinaire de la multiplication des polynômes, on a

$$(a+bi)(a'+b'i)=aa'+bb'i^2+(ab'+ba')i;$$

si l'on remplace ensuite i^2 par -1, il vient

$$(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+ba')i.$$

Le produit est une quantité imaginaire de la même forme que les quantités proposées. Si l'on a à effectuer le produit d'un nombre quelconque de facteurs imaginaires, on calculera le produit des deux premiers facteurs, comme nous venons de l'indiquer; on multipliera ce produit par le troisième facteur, et ainsi de suite; le produit final sera de la même forme.

Supposons les deux facteurs mis sous la forme

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha), \qquad r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha');$$

le produit sera

$$rr'[(\cos\alpha\cos\alpha'-\sin\alpha\sin\alpha')+i(\sin\alpha\cos\alpha'+\cos\alpha\sin\alpha')],$$

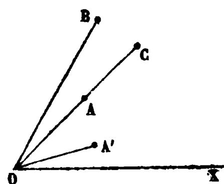
ou plus simplement

$$rr'[\cos(\alpha+\alpha')+i\sin(\alpha+\alpha')].$$

On voit que *le produit de deux quantités imaginaires est une quantité imaginaire qui a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments.*

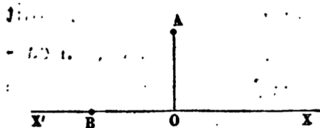
La même règle s'étend à un nombre quelconque de facteurs, et il est clair que le produit ne change pas quand on change l'ordre des facteurs.

Il est facile de donner à cette opération un sens géométrique. Pour multiplier la grandeur géométrique OA par la grandeur géométrique OA′, il faut d'abord multiplier la longueur OA par le nombre abstrait qui mesure la longueur OA′, puis faire tourner la droite OC ainsi obtenue d'un angle COB égal à l'angle XOA′. On voit en



effet que la grandeur géométrique OB a son module égal au produit des modules et son argument égal à la somme des arguments.

Si l'on applique cette règle au produit $i \times i$, on remarque



que la quantité imaginaire i est figurée par une longueur OA égale à l'unité portée sur la perpendiculaire à l'axe fixe X'X; il faut multiplier cette longueur par l'unité, puis la faire tourner d'un angle droit autour du point O, ce qui donne une longueur OB portée sur OX'; ce résultat est égal à -1. Ceci est bien d'accord avec la convention fondamentale $i^2 = -1$.

Deux quantités imaginaires $a+bi$, $a-bi$, qui ne diffèrent que par le signe de i, sont dites *conjuguées*. On a

$$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2.$$

Le produit de ces quantités est réel.

Il est évident que le produit de plusieurs facteurs réels et positifs ne peut devenir nul que si l'un des facteurs au moins devient nul. La même propriété a lieu quand les facteurs sont imaginaires; car le module du produit étant égal au produit des modules des facteurs, pour que ce module devienne nul, il est nécessaire et il suffit que le module de l'un des facteurs devienne nul.

Division.

146. Diviser une quantité imaginaire $a+bi$ par une quantité imaginaire $a'+b'i$, c'est chercher une quantité imaginaire $x+yi$ qui, multipliée par le diviseur, repro-

duise le dividende. On doit donc avoir

$$a + bi = (a' + b'i)(x + yi),$$

ou, en effectuant le produit,

$$a + bi = (a'x - b'y) + (b'x + a'y)i,$$

et par suite, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$a'x - b'y = a,$$
$$b'x + a'y = b.$$

On déduit de là

$$x = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}, \qquad y = \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}.$$

On a ainsi

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} i.$$

147. On ne change pas la valeur d'une fraction $\frac{A}{B}$ formée de quantités imaginaires A et B, quand on multiplie ses deux termes par une même quantité imaginaire C; car en désignant par Q le quotient que nous venons de trouver, on a

$$A = B \times Q;$$

si l'on multiplie par C ces deux quantités égales, il vient

$$AC = B \times Q \times C = BC \times Q,$$

d'où

$$\frac{AC}{BC} = Q = \frac{A}{B}.$$

Il en résulte une manière commode d'effectuer le calcul

du quotient de deux quantités imaginaires; car si l'on multiplie les deux termes de la fraction

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}$$

par la quantité $a'-b'i$ conjuguée du dénominateur, on a

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2},$$

le dénominateur devient réel et la question est ramenée à une multiplication; on retrouve ainsi le résultat obtenu précédemment

$$\frac{a+bi}{a'+b'i}=\frac{(aa'+bb')+(ba'-ab')i}{a'^2+b'^2}.$$

Quand on met les deux quantités imaginaires sous la forme $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $r'(\cos\alpha'+i\sin\alpha')$, on peut écrire immédiatement le quotient de ces deux quantités

$$\frac{r}{r'}[\cos(\alpha-\alpha')+i\sin(\alpha-\alpha')];$$

car, en multipliant ce quotient par le diviseur, on retrouve le dividende. Ainsi, *le quotient a pour module le quotient des modules et pour argument la différence des arguments.*

Puissances.

148. Commençons par former les puissances successives de i. On a d'abord $i^2=-1$. La troisième puissance i^3 étant égale à la deuxième i^2 multipliée par i, il vient

$$i^3=i^2\times i=-1\times i=-i.$$

La quatrième étant égale à la troisième multipliée par i,

on a de même

$$i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = -(-1) = +1,$$

et ainsi de suite

$$i^5 = i^4 \times i = i,$$
$$i^6 = i^5 \times i = i \times i = i^2 = -1.$$

On obtient de la sorte la série des puissances

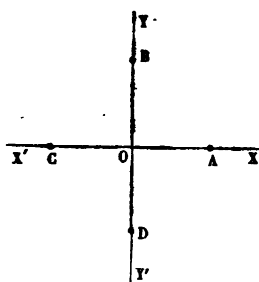
$$i^0 = +1, \quad i^1 = +i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i,$$
$$i^4 = +1, \quad i^5 = +i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i,$$
. . . .

La quatrième puissance i^4 étant égale à i^0, il est clair que les mêmes résultats se reproduisent périodiquement de quatre en quatre, et l'on a en général

$$i^{4m} = 1, \quad i^{4m+1} = i, \quad i^{4m+2} = -1, \quad i^{4m+3} = -i.$$

Les puissances paires sont réelles, les puissances impaires imaginaires.

Ces résultats sont évidents géométriquement. Les longueurs OA et OB, égales à l'unité, portées sur OX et OY, représentent la première $+1$, la seconde i. Multiplier une grandeur géométrique par i, c'est la faire tourner d'un angle droit autour d'un point O. En multipliant ainsi plusieurs fois successivement la grandeurs OA par i, on obtient les quatre grandeurs OB, OC, OD, OA, ou $i, -1, -i, +1$, qui se reproduisent périodiquement,



149. Si, d'après la convention générale sur le calcul des

quantités imaginaires, on applique la formule du binôme (n° 34) au développement de $(a+bi)^m$, on a

$$(a+bi)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}bi + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2i^2 + \ldots\ldots$$

En remplaçant les puissances successives de i par les valeurs trouvées précédemment, il vient

$$(a+bi)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}bi - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3}b^3i + \ldots\ldots;$$

les termes sont alternativement réels et imaginaires. Réunissons enfin les termes réels et les termes imaginaires, nous aurons

$$(a+bi)^m = \left[a^m - \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} a^{m-4}b^4 - \ldots\right] + \left[ma^{m-1}b - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots\right]i.$$

Dans chaque parenthèse les termes sont alternativement positifs et négatifs. Si l'on désigne par A et B les valeurs de ces deux parenthèses, on voit que le développement de $(a+bi)^m$ est une quantité imaginaire de la forme ordinaire $A + Bi$.

Il est clair que le développement de $(a-bi)^m$ ne diffère de celui de $(a+bi)^m$ qu'en ce que le signe de i est changé. Nous avons trouvé

$$(a+bi)^m = A + Bi;$$

on aura donc

$$(a-bi)^m = A - Bi.$$

Applications.

1° $(1+i)^5 = 1 + 5i - 10 - 10i + 5 + i = -4 - 4i.$

2° $(1-i)^5 = -4 + 4i.$

3° $(3+2i)^6 = 3^6 + 6.3^5.2i - 15.3^4.2^2 - 20.3^3.2^3 i + 15.3^2 2^4 + 6.3.2^5 i - 2^6 = -2035 - 828i.$

4° $(3-2i)^6 = -2035 + 828i.$

Lorsque la quantité $a+bi$ est mise sous la forme $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, on peut écrire immédiatement

$$(a+bi)^m = r^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha);$$

car la puissance m^e d'une quantité est le produit de m facteurs égaux à cette quantité, et l'on sait que le module du produit est le produit des modules des facteurs et son argument la somme des arguments.

Supposons que dans un polynôme entier

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_m,$$

à coefficients réels ou imaginaires, on donne à la variable x une valeur imaginaire $a+bi$. Une puissance $(a+bi)^m$, comme nous l'avons expliqué, prenant une valeur de la forme $A+Bi$, un terme quelconque du polynôme, qui est le produit d'une puissance de x par un coefficient réel ou imaginaire, prend une valeur de la même forme. En réunissant les parties réelles fournies par les différents termes du polynôme, ainsi que les parties imaginaires, on obtiendra finalement un résultat de la forme $A+Bi$.

Racines.

150. Proposons-nous d'abord d'extraire la racine carrée de la quantité $a+bi$; il s'agit de trouver une quantité de la

forme $x+yi$ qui, élevée au carré, reproduise la quantité proposée. On doit donc avoir

$$(x+yi)^2 = a+bi,$$

ou, en développant le carré,

$$(x^2-y^2)+2xyi = a+bi;$$

et par suite

$$x^2-y^2=a, \quad 2xy=b.$$

On remplacera le système de ces deux équations par le système équivalent

$$y=\frac{b}{2x}, \quad x^4-ax^2-\frac{b^2}{4}=0.$$

Les inconnues x et y devant avoir des valeurs réelles, on en déduit

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

$$y=\pm\frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

On a ainsi

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right).$$

On a, par exemple,

$$\sqrt{i}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

151. Proposons-nous maintenant d'extraire la racine m^e

de $a + bi$, c'est-à-dire de trouver une quantité imaginaire de la même forme, qui, élevée à la puissance m, reproduise la quantité proposée. Posons

$$a + bi = \mathrm{R}(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

et représentons l'inconnue par $r(\cos\omega + i\sin\omega)$, on doit avoir

$$r^m(\cos m\omega + i\sin m\omega) = \mathrm{R}(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Pour que ces deux quantités imaginaires soient égales, il est nécessaire que leurs modules soient égaux et que leurs arguments soient égaux ou diffèrent d'un multiple quelconque de 2π. On aura donc

$$r^m = \mathrm{R}, \quad m\omega = \alpha + 2k\pi,$$

d'où

$$r = \mathrm{R}^{\frac{1}{m}}, \quad \omega = \frac{\alpha + 2k\pi}{m},$$

et les diverses valeurs de l'inconnue sont données par la formule

$$\mathrm{R}^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{m}\right),$$

dans laquelle la lettre k désigne un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

152. Il est aisé de voir, d'après cette formule, que l'inconnue admet m racines distinctes. En effet, si l'on donne à k les m valeurs consécutives

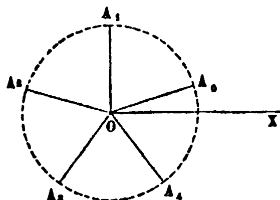
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ m-1,$$

on obtient m valeurs qui ont même module $\mathrm{R}^{\frac{1}{m}}$ et pour argument les arcs

$$\frac{\alpha}{m},\ \frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m},\ \frac{\alpha}{m}+2\frac{2\pi}{m},\ \frac{\alpha}{m}+3\frac{2\pi}{m},\ \ldots\ \frac{\alpha}{m}+(m-1)\frac{2\pi}{m}.$$

Comme ces arguments sont plus petits que 2π et qu'ils diffèrent entre eux, les m quantités qui leur correspondent sont distinctes. Si l'on donnait à k les valeurs m, $m+1$, $m+2$....., en négligeant un multiple de 2π, on retrouverait les arguments déjà obtenus et les mêmes racines se reproduiraient dans le même ordre. Si l'on donnait à k les valeurs négatives -1, -2, -3....., on retrouverait encore les mêmes racines, mais dans un ordre inverse. Ainsi, la racine m^e d'une quantité donnée admet m valeurs distinctes et n'en admet que m.

Du point O comme centre avec un rayon égal à $R^{\frac{1}{m}}$, décrivons un cercle; prenons l'angle XOA_0 égal à $\frac{m}{\alpha}$ et, à partir du point A_0, divisons la circonférence en m parties égales; les m valeurs de la racine seront figurées par les rayons OA_0, OA_1, OA_2....., qui vont du centre aux différents points ou divisions de la circonférence. Ces m quantités forment une étoile régulière à m rayons.



L'extraction de la racine revient à la résolution de l'équation binôme $x^m = A$. Nous étudierons avec plus de détails en trigonométrie les propriétés des racines de cette équation.

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Étude des fonctions entières.

153. Lemme I. *Quand un polynôme entier en* x *ne contient pas de terme constant, on peut donner à* x *une valeur assez petite pour le polynôme ait une valeur plus petite que toute quantité donnée.*

Soit

$$ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots + kx^m$$

un polynôme entier en x, à coefficients réels, ne renfermant pas de terme constant, et ordonné suivant les puissances croissantes de x. Je dis qu'on peut donner à x une valeur réelle assez petite, abstraction faite du signe, pour que la valeur absolue y du polynôme soit plus petite qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit. En effet, si l'on désigne par M le plus grand coefficient en valeur absolue du polynôme, on a évidemment

$$y < \text{M}(x + x^3 + x^3 + \ldots\ldots),$$

puisqu'on remplace tous les coefficients par le plus grand d'entre eux et qu'on a pris tous les termes positivement; on peut aussi prolonger la série à l'infini, en supposant x inférieure à l'unité, afin de rendre la série convergente. Faisons la somme des termes, il vient

$$y < \frac{\text{M}x}{1 - x}.$$

La question sera satisfaite si l'on rend le second membre plus petit que α ; posons donc

$$\frac{Mx}{1-x} < \alpha,$$

d'où

$$x < \frac{\alpha}{M+\alpha}.$$

Ainsi, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\frac{\alpha}{M+\alpha}$ et $+\frac{\alpha}{M+\alpha}$, le polynôme aura une valeur comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Par exemple, la valeur du polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5$$

sera comprise entre $-0,1$ et $+0,1$ quand la variable x sera comprise entre $-\frac{1}{91}$ et $+\frac{1}{91}$, ou plus simplement entre $-0,01$ et $+0,01$.

154. LEMME II. *Quand un polynôme entier à coefficients réels est ordonné par rapport aux puissances croissantes de* x, *on peut donner à la variable une valeur réelle assez petite pour que le premier terme soit plus grand que la somme de tous les autres, et par conséquent donne son signe au polynôme.*

Soit

$$y = ax^n + bx^{n+1} + cx^{n+2} + \ldots\ldots$$

le polynôme proposé ; je le mets sous la forme

$$y = x^n(a + bx + cx^2 + \ldots\ldots).$$

Nous venons de démontrer que l'on peut donner à x une valeur assez petite numériquement pour que la valeur absolue du polynôme

$$bx + cx^2 + \ldots\ldots$$

soit inférieure à celle de a. Pour ces valeurs de x, le premier terme du polynôme proposé sera plus grand que la somme de tous les autres et donnera son signe au polynôme.

Par exemple, le premier terme du polynôme

$$2x - 3x^2 + 7x^3 + 9x^4 - 4x^5$$

sera plus grand que la somme de tous les autres pour les valeurs de x comprises entre $-\frac{2}{11}$ et $+\frac{2}{11}$.

155. LEMME III. *Quand un polynôme entier à coefficients réels est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x, *on peut donner à* x *une valeur réelle assez grande pour que le premier terme soit plus grand que la somme de tous les autres, et, par conséquent, donne son signe au polynôme.*

Soit le polynôme

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots$$

Mettant x^m en facteur, je l'écris sous la forme

$$y = x^m\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \ldots\ldots\right).$$

Le polynôme entre parenthèse est ordonné par rapport aux puissantes croissantes de la variable $\frac{1}{x}$; en vertu du lemme précédent, on peut prendre $\frac{1}{x}$ assez petit, c'est-à-dire x

assez grand en valeur absolue, pour que le premier terme soit plus grand que la somme de tous les autres, et, par conséquent, donne son signe au polynôme.

Par exemple, le premier terme du polynôme

$$2x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 7$$

surpassera la somme de tous les autres pour toutes les valeurs de $\frac{1}{x}$ plus petites que $\frac{2}{8+2} = \frac{1}{5}$, et par conséquent pour toutes les valeurs de x plus grandes que 5, en valeur absolue.

156. Théorème I. *Une fonction entière varie d'une manière continue.*

Désignons par $f(x)$ un polynôme entier à coefficients réels et supposons que l'on n'attribue à la variable x que des valeurs réelles. Si l'on donne à la variable x un accroissement h, la fonction éprouve l'accroissement (n° 97).

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{1.2}h^2 + \frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3 + \ldots\ldots$$

Le second membre étant un polynôme entier en h qui ne renferme pas de terme constant, on peut donner à h une valeur numérique assez petite pour que ce polynôme ait une valeur absolue plus petite que toute quantité donnée. Ainsi, à un accroissement infiniment petit de la variable correspond un accroissement infiniment petit de la fonction, et, par conséquent, lorsque la variable x varie d'une manière continue, la fonction varie aussi d'une manière continue.

157. Remarque. Il est aisé de voir que si la variable x

augmente indéfiniment en valeur absolue, la fonction augmente aussi indéfiniment. En effet, mettons le polynôme

$$f(x) = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots\ldots$$

sous la forme

$$f(x) = x^m\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \ldots\ldots\right).$$

Quand x est très-grand ou $\frac{1}{x}$ très-petit, la valeur de la parenthèse diffère très-peu de la quantité fixe a; le premier facteur x^m augmente indéfiniment; donc le produit devient plus grand que toute quantite donnée.

Supposons, pour fixer les idées, le premier coefficient positif; lorsque x tend vers $+\infty$, le polynôme tend aussi vers $+\infty$; lorsque x tend vers $-\infty$, le polynôme tend vers $-\infty$ s'il est de degré impair, et vers $+\infty$ s'il est de degré pair. Ainsi, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction varie de $-\infty$ à $+\infty$, si m est impair; si m est pair, elle part de $+\infty$ pour revenir à $+\infty$. Dans l'intervalle, elle peut éprouver des alternatives de croissance et de décroissance.

Le signe de la dérivée $f'(x)$ indique si la fonction croît ou décroît; cette dérivée, étant un polynôme entier en x conserve toujours le signe de son premier terme au delà d'une certaine limite, à partir de laquelle la fonction n'éprouvera plus aucune alternative d'augmentation et de diminution. En supposant comme précédemment le premier coefficient positif, la dérivée restera constamment positive et la fonction ira en augmentant indéfiniment, à partir d'une certaine valeur de x.

158. Théorème II. *Lorsque deux nombres réels substi-*

tués dans un polynôme entier à coefficients réels donnent des résultats de signes contraires, le polynôme a au moins une racine réelle comprise entre ces deux nombres.

Ceci résulte de la continuité de la fonction. Soit x_0 plus petit que x_1, et supposons, par exemple, que le polynôme $f(x)$ ait une valeur négative pour $x=x_0$, une valeur positive $x=x_1$. Si l'on imagine que x croisse d'une manière continue de x_0 à x_1, la fonction variera d'une manière continue, allant d'une valeur négative à une valeur positive; comme elle reste finie, elle devra nécessairement dans l'intervalle passer par la valeur intermédiaire zéro. Ainsi, la fonction $f(x)$ s'annule pour une valeur de x comprise x_0 et x_1; cette valeur de x est racine de l'équation $f(x)=0$.

Il est possible que la fonction passe plusieurs fois par zéro dans l'intervalle de x_0 à x_1; dans ce cas, l'équation admet plusieurs racines réelles entre x_0 et x_1.

Toute fonction finie et continue jouit évidemment de la même propriété.

159. Théorème III. *Une équation algébrique de degré impair à coefficients réels a au moins une racine réelle.*

On appelle équation algébrique l'équation que l'on obtient en égalant à zéro une fonction entière $f(x)$. On peut toujours supposer le premier coefficient positif; s'il était négatif, on changerait tous les signes. Si l'on donne à x une valeur négative très-grande en valeur absolue, le polynôme prend une valeur de même signe que celle de son premier terme, c'est-à-dire une valeur négative, puisque ce dernier terme est de degré impair. Au contraire, si l'on donne à x une valeur positive très-grande, le polynôme prend une valeur positive. Ainsi, quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le polynôme $f(x)$ change de signe et s'annule au

moins une fois; donc l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle.

Cette racine réelle a un signe contraire à celui du dernier terme de l'équation. Supposons d'abord que le dernier terme, c'est-à-dire le terme indépendant de x, soit négatif; pour $x = 0$, le polynôme, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative; pour une valeur très-grande positive, il a une valeur positive; donc le polynôme change de signe quand x varie de 0 à $+\infty$ et, par conséquent, l'équation admet une racine positive. Supposons maintenant que le dernier terme soit positif; pour $x = -\infty$, le polynôme est négatif, pour $x = 0$, il est positif; il change donc de signe quand x varie de $-\infty$ à 0 et, par conséquent, l'équation admet une racine négative.

On peut affirmer, par exemple, que l'équation

$$x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = 0$$

a au moins une racine réelle positive, et que l'équation

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 7 = 0$$

a au moins une racine réelle négative.

160. Théorème IV. *Une équation algébrique de degré pair, à coefficients réels, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles.*

Pour $x = 0$, le polynôme, se réduisant à son dernier terme, a une valeur négative. D'ailleurs, une valeur de x très-grande, soit positive, soit négative, rend le polynôme positif, puisque son premier terme, qui est de degré pair, reste toujours positif. Ainsi le polynôme change deux fois de signe, une fois de 0 à $+\infty$, une seconde fois de 0 à $-\infty$; donc, l'équation admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Par exemple, l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x - 2 = 0$$

admet au moins deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative.

Il est un cas où l'on ne sait pas si l'équation admet des racines réelles : c'est celui où l'équation, étant de degré pair, a son dernier terme positif; car, dans ce cas, le polynôme a des valeurs positives pour $x = 0$ et pour des valeurs de x très-grandes, positives ou négatives. Ainsi, on ne sait pas si l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2 = 0$$

admet des racines réelles.

161. Théorème V. *Si* a *est racine d'une équation algébrique, le premier membre est divisible par* x — *a.*

Soit $f(x)$ un polynôme entier du degré m, à coefficients quelconques, réels ou imaginaires, et ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x; on peut diviser ce polynôme par $x - a$ et pousser l'opération jusqu'à ce qu'on arrive à un reste indépendant de x. Si l'on appelle $\varphi(x)$ le quotient qui est un polynôme entier du $m - 1^e$ degré, et R le reste constant, on aura

$$f(x) = (x - a)\varphi(x) + R.$$

Cette égalité est vraie, quelle que soit la valeur de x. Donnons à x la valeur particulière a, le premier terme du second membre s'évanouit, puisque le facteur $x - a$ devient nul et que l'autre facteur $\varphi(a)$ conserve une valeur finie; il vient donc

$$f(a) = R.$$

Ainsi, *quand on divise un polynôme entier par un binôme de la forme* x — a, *le reste de la division est le résultat que l'on obtient en remplaçant* x *par* a *dans ce polynôme.*

Supposons maintenant que a soit racine du polynôme $f(x)$; cela signifie que, si l'on remplace x par a dans le polynôme, on obtient un résultat $f(a)$ égal à zéro. Donc le reste R est nul, et l'on a

$$f(x) = (x - a)\varphi(x).$$

Ainsi, *lorsque* a *est racine d'un polynôme entier, ce polynôme est divisible par* x — a.

Réciproquement, *si un polynôme est divisible par un binôme de la forme* x — a, *la quantité* a *est racine du polynôme.* En effet, dire que le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$, c'est dire que le reste constant R auquel on arrive en effectuant la division est nul; donc la quantité $f(a)$ est égale à zéro et a est racine.

162. Nous indiquerons maintenant une règle très-simple pour calculer le quotient.

Soit

$$f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$$

le polynôme proposé.

Divisons ce polynôme par $x - a$,

$$\begin{array}{r|l}
A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} \ldots + A_{m-1}x + A_m & x - a \\
\hline
(A_0a + A_1)x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m & A_0x^{m-1} + B_1x^{m-2} + B_2x^{m-3} \ldots + B_{m-1} \\
(B_1a + A_2)x^{m-2} + A_3x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m & \\
(B_2a + A_3)x^{m-3} \ldots\ldots\ldots\ldots + A_m & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(B_{m-2}a + A_{m-1})x + A_m & \\
\text{Reste} \quad \ldots\ldots\ldots \quad B_{m-1}a + A_m &
\end{array}$$

Le premier terme du quotient est A_0x^{m-1}; multiplions ce terme par le diviseur $x - a$, et retranchons du dividende; le produit par x détruit le premier terme du dividende, le produit par $-a$ donne la quantité A_0ax^{m-1} qui s'ajoute au second terme; ainsi le premier reste ou second dividende a pour premier terme $(A_0a + A_1)x^{m-1}$, les termes suivants étant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par x, on aura le second terme B_1x^{m-2} du quotient, en représentant pour abréger $A_0a + A_1$ par B_1; multiplions ce second terme par $x - a$, le produit par x détruit le premier terme du second dividende, le produit par $-a$ donne la quantité B_1ax^{m-2} qui s'ajoute au second terme; ainsi le troisième dividende a pour premier terme $(B_1a + A_2)x^{m-2}$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par x, on aura le troisième terme B_2x^{m-3} du quotient, en représentant $B_1a + A_2$ par B_2, et ainsi de suite.

Cette loi est générale : *on obtient un coefficient quelconque du quotient en multipliant le coefficient précédent par* a *et ajoutant le coefficient du terme qui dans le polynôme proposé occupe le même rang que le terme cherché du quotient.*

On arrivera ainsi au dernier dividende

$$(B_{m-2}a + A_{m-1})x + A_m,$$

qui donnera le dernier terme B_{m-1} du quotient, B_{m-1} représentant la quantité $B_{m-2}a + A_{m-1}$; en multipliant ce dernier terme par $x - a$ et retranchant du dernier dividende, on aura le reste de la division $B_{m-1}a + A_m$. On voit par là que le reste de la division se forme au moyen du dernier terme du quotient suivant la même loi, en multipliant le dernier terme du quotient par a et ajoutant le dernier terme du dividende.

Les coefficients du quotient, formés d'après cette loi, ont pour valeurs

$$B_1 = A_0 a + A_1,$$
$$B_2 = A_0 a^2 + A_1 a + A_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_{m-1} = A_0 a^{m-1} + A_1 a^{m-2} + \ldots + A_{m-1},$$

et le reste de la division

$$R = B_{m-1} a + A_m = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_m.$$

Exemples.

1° Diviser par $x - 3$ le polynôme

$$2x^5 - 8x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 5x + 12.$$

L'application de la règle précédente donne le quotient

$$2x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 4.$$

Après avoir écrit le premier coefficient 2, on dira : 2 multiplié par 3..... 6 et $-$ 8..... $-$ 2 ; $-$ 2 multiplié par 3..... $-$ 6 et $+$ 7..... $+$ 1 ; $+$ 1 multiplié par 3..... $+$ 3 et $-$6.....$-$3 ; $-$ 3 multiplié par 3.....$-$9 et $+$ 5.....$-$4. Si l'on multiplie le dernier terme du quotient par 3 et que l'on ajoute le dernier terme 12 du dividende, on trouve le reste 0 ; donc 3 est racine du polynôme.

2° Diviser par $x + 2$ le polynôme

$$2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 5.$$

En opérant de la même manière, on trouve le quotient

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 6.$$

Ici $a = -2$, on dira donc : 2 multiplié par -2..... -4 et $+1$..... -3 ; -3 multiplié par -2..... $+6$ et -10..... -4 ; -4 multiplié par -2..... $+8$ et -2..... $+6$. En multipliant le dernier terme du quotient par -2 et ajoutant $+5$, on obtient le reste -7 de la division. Donc -2 n'est pas racine.

3° Diviser par $x-2$ le polynôme

$$x^8 - 13x^5 + 7x^4 + 13x^2 + 2x - 8.$$

Le polynôme n'est pas complet; il ne contient pas de termes en x^7, en x^6 et en x^3; on imaginera le polynôme complété au moyen de coefficients nuls et écrit sous la forme

$$x^8 + 0x^7 + 0x^6 - 13x^5 + 7x^4 + 0x^3 + 13x^2 + 2x - 8\,;$$

puis on appliquera la règle ordinaire. Le quotient est

$$x^7 + 2x^6 + 4x^5 - 5x^4 - 3x^3 - 6x^2 + x + 4$$

et le reste nul. Donc 2 est racine.

163. THÉORÈME VI. *Tout polynôme entier du degré* m *peut être décomposé en un produit de* m *facteurs du premier degré.*

On démontre qu'un polynôme entier du degré m a m racines; nous admettrons pour le moment ce théorème fondamental, renvoyant la démonstration à la fin du volume.

Désignons par $f(x)$ un polynôme entier du degré m, et appelons a une racine réelle ou imaginaire; le polynôme $f(x)$ est divisible par $x-a$; en appelant X_1 le quotient, qui est un polynôme entier du degré $m-1$, on a

$$f(x) = (x-a)X_1.$$

Appelons de même b une racine du polynôme X_1; ce poly-

nôme sera divisible par $x-b$, et l'on aura

$$X_1 = (x-b)X_2,$$

le quotient X_2 étant un polynôme entier du degré $m-2$. Appelons c une racine du polynôme X_2; ce polynôme sera divisible par $x-c$, et l'on aura

$$X_2 = (x-c)X_3,$$

le quotient X_3 étant un polynôme du degré $m-3$. En continuant de la même manière, on arrivera à un polynôme X_{m-1} du premier degré, qui admet une racine k, et s'écrit

$$X_{m-1} = A(x-k),$$

le dernier quotient A étant indépendant de x. Si l'on multiplie entre elles toutes ces égalités, les polynômes intermédiaires disparaissent, et l'on a

$$f(x) = A(x-a)(x-b)(x-c) \ldots\ldots (x-k).$$

Ainsi tout polynôme entier du degré m peut être décomposé en un produit de m facteurs du premier degré.

Le facteur constant A est égal au premier coefficient du polynôme, parce que si l'on fait la multiplication, le premier terme du produit est Ax^m.

164. Théorème VII. *Un polynôme entier ne peut être décomposé qu'en un seul système de facteurs du premier degré.*

En effet, supposons qu'un autre mode de décomposition ait donné

$$f(x) = A'(x-a')(x-b')(x-c') \ldots\ldots (x-k').$$

Nous remarquons d'abord que les deux coefficients A et A' sont égaux, comme étant tous deux égaux au premier coefficient du polynôme. Les deux produits sont égaux pour

toutes les valeurs de x ; donnons à x la valeur particulière a ; le premier produit contenant le facteur $x-a$, s'annule ; le second, qui est égal au premier, doit s'annuler aussi ; pour cela il est nécessaire que l'un des facteurs s'annule, c'est-à-dire que la quantité a soit égale à l'une des quantités a', b', ... ; supposons $a=a'$; il en résulte que les deux produits contiennent tous deux le même facteur $x-a$. Si l'on divise ces deux produits égaux par $x-a$, on aura deux quotients

$$(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-k)=(x-b')(x-c')\ldots\ldots(x-k')$$

égaux pour toutes les valeurs de x. En donnant à x la valeur particulière b, on démontrera de même que le facteur $x-b$ du premier membre se trouve dans le second. On divisera par ce facteur commun et l'on continuera de la même manière jusqu'au dernier facteur. Ainsi les deux produits égaux sont composés identiquement des mêmes facteurs.

165. Remarque I. Nous avons démontré qu'un polynôme du degré m peut être décomposé en un produit de m facteurs du premier degré

$$f(x)=\mathrm{A}(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots(x-k).$$

Si l'on remplace x par l'une quelconque des m quantités $a, b, c, \ldots\ldots, k$, l'un des facteurs du second membre s'annule ; les autres facteurs conservant des valeurs finies, le produit s'annule aussi. Les m quantités $a, b, c, \ldots\ldots, k$ sont donc les m racines de l'équation $f(x)=0$.

L'équation n'admet pas d'autres racines que celles-là; car toute valeur de x, autre que $a, b, c, \ldots\ldots k$, n'annulera aucun des facteurs, et, par conséquent, n'annulera pas le produit $f(x)$.

166. Remarque II. Nous pouvons maintenant préciser davantage le sens du théorème démontré au n° 158. Nous avons dit que, lorsque deux nombres réels, que nous appellerons x_0 et x_1, mis à la place de x dans un polynôme $f(x)$ à coefficients réels, donnent des résultats de signes contraires, ces deux nombres comprennent au moins une racine réelle du polynôme. Nous pouvons ajouter que, si ces deux nombres comprennent plus d'une racine, ils en comprennent un nombre impair, et que, en outre, lorsque les deux nombres x_0 et x_1 donnent des résultats de même signe, ils ne comprennent aucune racine, ou en comprennent un nombre pair.

Désignons par $a, b, \ldots\ldots, e$ les diverses racines comprises entre x_0 et x_1, et écrivons le polynôme $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = (x - a)(x - b) \ldots\ldots (x - e)\varphi(x),$$

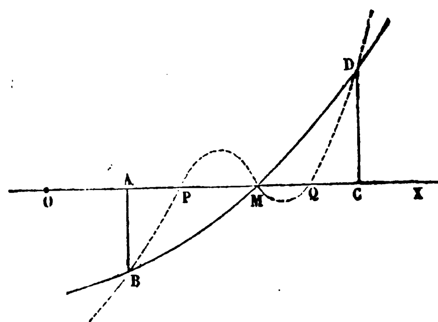
$\varphi(x)$ représentant le produit des facteurs qui correspondent aux autres racines. En remplaçant x successivement par x_0 et x_1, on a

$$f(x_0) = (x_0 - a)(x_0 - b) \ldots\ldots (x_0 - e)\varphi(x_0),$$
$$f(x_1) = (x_1 - a)(x_1 - b) \ldots\ldots (x_1 - e)\varphi(x_1).$$

Nous remarquerons d'abord que $\varphi(x_0)$ et $\varphi(x_1)$ sont des quantités de même signe; autrement, les deux nombres x_0 et x_1 comprendraient encore une autre racine, ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons x_0 plus petit que x_1: le nombre x_1 étant plus grand que les racines $a, b, \ldots\ldots, e$, chacun des facteurs $x_1 - a$, $x_1 - b$, ..., $x_1 - e$, est positif; donc $f(x_1)$ a le signe de $\varphi(x_1)$. Le nombre x_0 étant plus petit que les racines $a, b, \ldots\ldots, e$, chacun des facteurs $x_0 - a$, $x_0 - b$, ..., $x_0 - e$, est négatif. Si le nombre de ces facteurs est pair, $f(x_0)$ aura le même signe que $\varphi(x_0)$,

et, par conséquent, que $f(x_1)$; si le nombre des facteurs est impair, $f(x_0)$ aura un signe contraire à celui de $\varphi(x_0)$, et par conséquent contraire à celui de $f(x_1)$. Ainsi les deux résultats $f(x_0)$ et $f(x_1)$ ont le même signe ou des signes contraires, selon que le nombre des racines réelles comprises entre x_0 et x_1 est pair ou impair.

Des considérations géométriques très-simples font bien comprendre cette proposition. Imaginons que l'on représente par une courbe la fonction $f(x)$, comme nous l'avons expliqué au n° 93, en portant sur un axe horizontal OX, à partir d'un point fixe O les valeurs de x, et élevant des perpendiculaires ou ordonnées égales aux valeurs corres-

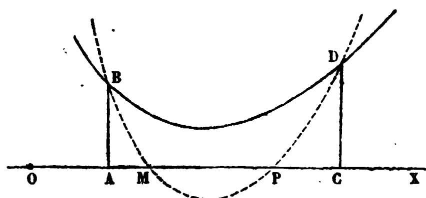


pondantes de la fonction, dans un sens ou dans l'autre, suivant le signe. Les racines réelles de l'équation $f(x) = o$ correspondent aux points où l'ordonnée devient nulle, c'est-à-dire où la courbe coupe l'axe OX. Si la courbe coupe l'axe au point M, la longueur OM est une racine de l'équation.

Supposons que deux valeurs OA et OC de la variable x donnent au polynôme des valeurs de signes contraires $-$AB et $+$CD ; pour aller du point B au point D, la courbe devra nécessairement couper l'axe OX en un certain point M, et

l'équation admettra une racine OM comprise entre OA et OC. Mais la courbe peut couper l'axe en plusieurs points, comme le montre la ligne ponctuée; dans ce cas elle le coupe en un nombre impair de points P, M, Q.

Supposons maintenant que les deux valeurs OA et OC de la variable u donnent à la fonction des valeurs $+$AB et $+$CD de même signe. La courbe pourra aller du point



B au point D sans rencontrer l'axe OX, et l'équation n'aura pas de racine dans l'intervalle; si elle coupe l'axe, elle le coupera en un nombre pair de points M, P, et l'équation aura un nombre pair de racines dans l'intervalle.

Relations entre les coefficients d'une équation algébrique et les racines.

167. Supposons que l'on ait divisé tous les termes de l'équation par le premier coefficient, afin de la ramener à la forme

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0.$$

Cette équation a m racines $a, b, c, \ldots\ldots, k$, et nous avons démontré que le premier membre $f(x)$ peut être décomposé en un produit de m facteurs binômes

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ \ldots\ldots\ (x-k).$$

Si l'on effectue ce produit, il est clair que l'on reproduira

identiquement le polynôme proposé. Or si l'on appelle S_1 la somme des racines, S_2 la somme des produits des racines deux à deux, S_3 la somme des produits trois à trois, ..., le produit des m facteurs binômes, d'après la formule établie au n° 33, se développera de la manière suivante :

$$x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} - S_3 x^{m-3} + \ldots\ldots \pm S_m.$$

En égalant les coefficients des deux polynômes, on a donc

$$A_1 = -S_1, \quad A_2 = +S_2, \quad A_3 = -S_3, \ldots\ldots$$

On en conclut :

THÉORÈME VIII. *Quand le premier coefficient de l'équation est l'unité, 1° la somme des racines égale le second coefficient changé de signe; 2° la somme des produits des racines deux à deux égale le troisième coefficient ; 3° la somme des produits des racines trois à trois égale le quatrième coefficient changé de signe, et ainsi de suite. Enfin le produit des racines égale le dernier terme pris avec son signe ou un signe contraire, suivant que* m *est pair ou impair.*

Exemples.

1° Nous avons déjà reconnu ces relations dans l'équation du second degré (1re partie, n° 145). Si l'on appelle a, b, c les trois racines d'une équation du troisième degré

$$x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0,$$

on a

$$a + b + c = -A_1, \quad ab + ac + bc = A_2, \quad abc = -A_3.$$

2° Résoudre une équation du troisième degré, sachant que l'une des racines est égale à la somme des deux autres.

Supposons que la racine a soit égale à la somme $b+c$ des deux autres. De la première relation $a+b+c=-A_1$ on tire $2a=-A_1$, d'où $a=-\frac{A_1}{2}$. La seconde relation s'écrivant $a(b+c)+bc=A_2$ donne $bc=A_2-a^2=A_2-\frac{A_1^2}{4}$; donc les deux autres racines sont fournies par l'équation du second degré

$$x^2+\frac{A_1}{2}x+\left(A_2-\frac{A_1^2}{4}\right)=0.$$

La troisième relation donne $bc=-\frac{A_3}{a}=\frac{2A_3}{A_1}$.

Pour que les racines de l'équation du troisième degré jouissent de la propriété énoncée, il faut donc que les coefficients de l'équation satisfassent à la relation

$$\frac{2A_3}{A_1}=A_2-\frac{A_1^2}{4}.$$

168. Théorème IX. *Une équation algébrique à coefficients réels a ses racines imaginaires conjuguées deux à deux.*

Nous avons dit (nº 149) que, lorsque dans le polynôme $f(x)$ on remplace x par $a+bi$, le polynôme acquiert une valeur de la forme $A+Bi$. Remplaçons maintenant x par la quantité imaginaire conjuguée $a-bi$; si tous les coefficients sont réels, il est clair que la valeur du polynôme ne différera de la précédente qu'en ce que i aura été changé en $-i$; on aura donc la quantité conjuguée $A-Bi$.

Si $a+bi$ est racine de l'équation $f(x)=0$, le premier résultat est nul, et l'on a séparément $A=0$, $B=0$; donc le second résultat est également nul, et la quantité $a-bi$ est aussi racine de l'équation. Ainsi, dans une équation

algébrique dont les coefficients sont réels, les racines imaginaires sont conjuguées deux à deux, et par conséquent leur nombre est toujours pair.

Cette proposition n'est vraie que si tous les coefficients de l'équation sont réels ; car s'il y a des coefficients imaginaires, quand on remplace $a+bi$ par $a-bi$, on change le signe i dans la valeur de x, mais non dans les coefficients qui restent constants ; on ne peut plus dire alors que le second résultat sera conjugué du premier.

Nous avons démontré qu'un polynôme du degré m se décompose en m facteurs du premier degré ; mais, parmi ces facteurs, les uns sont réels, les autres imaginaires. Supposons les coefficients réels et considérons les deux facteurs

$$(x-a-bi)(x-a+bi),$$

qui correspondent à deux racines imaginaires conjuguées ; le produit de ces deux facteurs

$$(x-a)^2+b^2$$

est un polynôme réel du second degré. Ainsi *un polynôme à coefficients réels se décompose en facteurs réels du premier ou du second degré.*

169. Remarque. Dans ce qui précède, nous avons supposé les coefficients réels ; supposons-les, non-seulement réels, mais encore commensurables ; dans ce cas, si l'équation admet une raison incommensurable de la forme $a+\sqrt{b}$, a et b étant des nombres commensurables, elle admettra la racine conjuguée $a-\sqrt{b}$. Concevez, en effet, que l'on remplace dans le polynôme x par $a+\sqrt{b}$ et que l'on développe les diverses puissances de $a+\sqrt{b}$, suivant

la loi du binôme; comme les puissances paires de $\sqrt{b}$ sont rationnelles et les puissances impaires de la forme $B\sqrt{b}$, B étant une quantité rationnelle, il est clair que l'on arrivera à une expression de la forme $P + Q\sqrt{b}$, en désignant par P et Q des quantités commensurables. Remplaçons maintenant x par $a - \sqrt{b}$; si tous les coefficients sont commensurables, la valeur du polynôme ne différera de la précédente que par le signe de $\sqrt{b}$, et l'on obtiendra la quantité conjuguée $P - Q\sqrt{b}$. Pour que $a + \sqrt{b}$ soit racine de l'équation, c'est-à-dire pour que la quantité $P + Q\sqrt{b}$ soit nulle, il faut que l'on ait séparément $P = 0$, $Q = 0$; donc $a - \sqrt{b}$ est aussi racine de l'équation.

Cette propriété, qui a de l'analogie avec la précédente, est beaucoup moins générale; il arrive rarement que l'équation admette une racine de la forme $a + \sqrt{b}$; lorsque cela a lieu, le premier membre admet un facteur du second degré

$$(x - a - \sqrt{b})(x - a + \sqrt{b}) = (x - a)^2 - b$$

à coefficients commensurables.

Règle des signes de Descartes.

170. Lorsqu'un polynôme à coefficients réels est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, deux termes consécutifs affectés de signes contraires présentent ce qu'on nomme une *variation*. Par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

a trois variations : une du premier au second terme, une du troisième au quatrième, une du cinquième au sixième. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. *Lorsqu'on multiplie un polynôme par* **x — a**, a *étant un nombre positif, on introduit au moins une variation nouvelle dans le polynôme.*

Un polynôme quelconque, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, peut être écrit sous la forme

$$\begin{array}{l} A_m x^m \ldots\ldots + A_{n+1} x^{n+1} - A_n x^n \ldots\ldots - A_{p+1} x^{p+1} + A_p x^p \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \pm A_{s+1} x^{s+1} \mp A_s x^s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mp A_0. \end{array}$$

Le polynôme commence par un groupe de termes positifs, puis vient un groupe de termes négatifs, puis un groupe de termes positifs, et ainsi de suite jusqu'au dernier groupe qui commence au terme $\mp A_s x^s$, à partir duquel il n'y a plus de changement de signes. Chaque groupe contient un nombre quelconque de termes et même un seul terme. Les variations se présentent quand on passe du dernier terme d'un groupe au premier du groupe suivant.

En multipliant ce polynôme par $x - a$, nous aurons

$$\begin{array}{rl|rl|rl|rl} A_m x^{m+1} \ldots\ldots & - A_n & x^{n+1} \ldots\ldots & + A_p & x^{p+1} \ldots\ldots & \mp A_s & x^{s+1} \ldots\ldots & \\ & - A_{n+1} a & & + A_{p+1} a & & \mp A_{s+1} a & & \pm A_0 a. \end{array}$$

La multiplication par x conserve à chaque terme son signe et donne la première ligne; la multiplication par $-a$ change tous les signes et donne la seconde ligne. Le premier terme $A_m x^{m+1}$ du produit a le signe $+$; le terme du degré $n+1$, provenant de l'addition de deux termes négatifs, a le signe $-$; quels que soient les signes des termes intermédiaires, il est certain qu'entre ces deux termes de signes contraires, il y a au moins une variation; on retrouve ainsi au produit la première variation du multiplicande, celle qui a lieu de x^m à x^n. De même le terme du degré $p+1$, provenant de l'addition de deux termes po-

sitifs, a le signe $+$; entre les deux termes en x^{n+1} et en x^{p+1}, qui sont de signes contraires, il y a au moins une variation, et l'on retrouve ainsi au produit la seconde variation du multiplicande, celle qui a lieu de x^n à x^p. Pour simplifier le raisonnement, nous pouvons réduire le multiplicande aux premiers termes des différents groupes, et ne considérer dans le produit que les termes correspondants, c'est-à-dire ceux dont le degré est supérieur d'une unité; ces termes du produit étant affectés des mêmes signes que les termes correspondants du multiplicande, il est clair que l'on retrouve au produit toutes les variations du multiplicande. Ainsi, quand on sera arrivé au terme en x^{s+1}, on aura retrouvé au produit toutes les variations du multiplicande. A partir du terme en x^s, le multiplicande ne présente plus aucune variation; mais le terme constant $\mp A_0$ du multiplicande, multiplié par $-a$, donne le dernier terme $\pm A_0 a$ du produit; ce dernier terme ayant un signe contraire à celui du terme en x^{s+1}, le dernier groupe du produit contiendra encore au moins une variation. On en conclut que le produit contient au moins une variation de plus que le multiplicande.

Il peut arriver que la multiplication par $x-a$ introduise plus d'une variation nouvelle; dans ce cas elle en introduit ou 3, ou 5,....., en général un nombre impair. En effet, dans chacun des groupes du produit, nous avons retrouvé la variation correspondante du multiplicande; mais, dans ce groupe, il peut y avoir plus d'une variation; car les termes intermédiaires, provenant de l'addition de deux termes de signes contraires, ont des signes quelconques; mais, lorsqu'il y en a plus d'une, il y a un nombre impair, c'est-à-dire une, plus un nombre pair, parce que entre deux termes de signes contraires il y a nécessairement un nombre

impair de changements de signes ; ainsi chaque groupe du produit pourra introduire un nombre pair de variations nouvelles. Le dernier groupe en introduit un nombre impair, en tout un nombre impair de variations nouvelles.

171. THÉORÈME X. *Dans une équation algébrique à coefficients réels, le nombre des racines positives ne peut surpasser le nombre des variations.*

Soit $f(x)=0$ une équation à coefficients réels ayant un certain nombre de racines positives $a, b, c, \ldots g$. Supposons le polynôme $f(x)$ décomposé en facteurs et désignons par $\varphi(x)$ le produit des facteurs binômes qui correspondent aux racines négatives et aux racines imaginaires conjuguées, nous aurons

$$f(x) = (x-a)(x-b)\ldots\ldots(x-g)\,\varphi(x).$$

D'après une remarque faite au n° 168, le polynôme $\varphi(x)$ a aussi ses coefficients réels. Or, si nous multiplions ce polynôme successivement par chacun des facteurs binômes $x-a$, $x-b, \ldots\ldots, x-g$, qui correspondent aux racines positives, chaque multiplication introduisant au moins une variation nouvelle, le produit final $f(x)$ contiendra au moins autant de variations qu'il y a de racines positives.

172. REMARQUE. *Si le nombre des racines positives n'est pas égal au nombre des variations, il en diffère d'un nombre pair.* Nous remarquons d'abord que le polynôme $\varphi(x)$ a son dernier terme positif, sans quoi il aurait une racine positive, ce qui est contraire à l'hypothèse ; ce polynôme contient donc un nombre pair de variations, s'il en contient. D'autre part, nous avons vu que la multiplication par chacun des facteurs $x-a$ introduit un nombre impair de variations, c'est-à-dire une, plus un nombre pair ; on aura ainsi

finalement dans le polynôme $f(x)$ autant de variations qu'il y a de racines positives, plus une somme de nombres pairs, c'est-à-dire plus un nombre pair de variations.

Par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

présente trois variations. Elle ne peut admettre plus de trois racines positives; elle en aura trois ou une.

L'équation

$$x^7 - 5x^3 + 8x^2 - 4x + 6 = 0$$

présente quatre variations; elle ne peut admettre plus de quatre racines positives; elle en aura quatre, ou deux, ou pas du tout.

L'équation

$$x^6 + 4x^3 - 5 = 0$$

présente une seule variation. Elle ne peut avoir plus d'une racine positive, et elle en a certainement une.

173. COROLLAIRE. Si dans l'équation $f(x) = 0$, on change x en $-x$, on obtient une nouvelle équation qui a évidemment pour racines celles de l'équation proposée changées de signes; ainsi, les racines négatives de la première deviennent positives dans la seconde. Si donc on applique le théorème précédent à l'équation transformée, on aura une limite supérieure du nombre des racines négatives de l'équation proposée.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 8 = 0$$

en remplaçant x par $-x$, on obtient la transformée

$$-x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 7x - 8 = 0,$$

qui présente deux variations. Cette dernière équation admet au plus deux racines positives, et par conséquent la proposée a au plus deux racines négatives. Si elle n'en a pas deux, elle n'en a pas du tout.

De même l'équation

$$x^7 - 5x^3 + 8x^2 - 4x + 6 = 0$$

ayant pour transformée l'équation

$$-x^7 + 5x^3 + 8x^2 + 4x + 6 = 0,$$

qui présente une seule variation, a une racine négative et une seule. Nous avons vu déjà que cette équation a au plus quatre racines positives; elle admet donc au plus cinq racines réelles; comme elle a sept racines, puisqu'elle est du septième degré, il s'ensuit qu'elle a au moins deux racines imaginaires.

L'équation

$$x^6 + 4x^3 - 5 = 0$$

ayant pour transformée

$$x^6 - 4x^3 - 5 = 0,$$

a une racine négative, et une seule. Nous avons vu déjà qu'elle a une racine positive; donc, elle a en tout deux racines réelles, et, par conséquent, quatre racines imaginaires.

Plus grand commun diviseur algébrique.

174. Supposons que deux fonctions entières de x aient été décomposées en facteurs du premier degré, le produit des facteurs du premier degré communs à ces deux poly-

nômes s'appelle leur *plus grand commun diviseur algébrique.*

Je désigne par X et X_1 ces deux polynômes, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, en supposant que X soit d'un degré supérieur ou égal à X_1. Je divise X par X_1; j'appelle Q le quotient et X_2 le reste, ce qu donne

$$X = X_1 Q + X_2.$$

Je dis que le plus grand commun diviseur entre X et X_1 est le même qu'entre X_1 et X_2. En effet, soit $(x-a)^n$ un facteur commun à X et à X_1; si l'on pose $X = (x-a)^n X'$, $X_1 = (x-a)^n X'_1$, on a

$$X_2 = X - X_1 Q = (x-a)^n (X' - X'_1 Q);$$

le polynôme X_2, étant égal au produit de $(x-a)^n$ par un polynôme entier, admet aussi le facteur $(x-a)^n$. Ainsi tout facteur de la forme $(x-a)^n$ commun à X et X_1 est aussi commun à X_1 et à X_2. On démontrerait de même que, réciproquement, tout facteur de cette forme commun à X_1 et à X_2 est aussi commun à X et X_1. Les facteurs premiers communs étant les mêmes de part et d'autre, les produits de ces facteurs communs, ou les plus grands communs diviseurs, sont les mêmes.

Ainsi la question est ramenée à la recherche du plus grand commun diviseur entre X_1 et X_2. On procédera de la même manière : en divisant X_1 par X_2, et appelant X_3 le reste, on aura

$$X_1 = X_2 Q_1 + X_3.$$

Le plus grand commun diviseur entre X_1 et X_2 est le même qu'entre X_2 et X_3.

Divisons X_2 par X_3, et supposons que l'on trouve un

reste nul; il est clair que X_3, divisant exactement X_2, est le produit des facteurs du premier degré communs à X_2 et à X_3; c'est donc le plus grand commun diviseur cherché.

Ainsi, *pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynômes, après avoir ordonné ces deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes de* x, *on divise celui qui est du degré le plus élevé par l'autre, celui-ci par le reste de la division, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un reste nul. Le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur cherché.*

Dans ces opérations, les restes, et par suite les diviseurs successifs, vont en diminuant de degré; on arrivera donc à un reste nul ou à un reste indépendant de x. Dans le premier cas, les deux polynômes admettent un plus grand commun diviseur algébrique d'un certain degré. Dans le second cas, ils n'en admettent pas, et sont dits premiers entre eux.

175. Remarque. Dans la pratique, afin d'éviter les coefficients fractionnaires, on peut multiplier tous les termes de l'un quelconque des polynômes par une quantité quelconque indépendante de x. De même, si l'on aperçoit un facteur commun aux coefficients de tous les termes d'un certain reste, on peut le supprimer. Je suppose, par exemple, que pour effectuer la première division on ait multiplié le dividende par un nombre A, et qu'ensuite on ait divisé tous les termes du reste par le nombre B, on aura

$$AX = X_1Q + BX_2.$$

On démontrera comme précédemment que tout facteur de

la forme $(x-a)^n$ commun à X et à X_1 est aussi commun à X_1 et à X_2, et réciproquement. Ainsi rien n'est changé dans la recherche du plus grand commun diviseur.

Racines communes à deux équations.

176. Si les deux équations

$$X=0, \qquad X_1=0$$

ont n racines communes, les deux polynômes X et X_1 admettent n facteurs du premier degré communs, et, par conséquent, ils ont un plus grand commun diviseur du degré n. Pour trouver les racines communes à deux équations, on cherchera donc le plus grand commun diviseur des deux premiers membres de ces équations; soit D ce plus grand commun diviseur, l'équation

$$D=0$$

donnera les racines communes aux deux équations.

Si les deux polynômes n'ont pas de plus grand commun diviseur algébrique, les deux équations n'ont pas de racine commune. Si le plus grand commun diviseur est du premier degré, il y a une racine commune; s'il est du second degré, il y a deux racines communes, etc.

Exemples.

1° Trouver les racines communes aux deux équations

$$x^4-3x^3+3x^2-3x+2=0,$$
$$2x^3-5x^2+x+2=0.$$

Voici le détail des opérations :

$$
\begin{array}{r|r|l}
 & x-1 & 2x+1 \\
x^4-3x^3+3x^2-3x+2 & 2x^3-5x^2+x+2 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} \cline{3-3}
2x^5-6x^3+6x^2-6x+4 & -2x^3+6x^2-4x & \\ \cline{2-2}
-2x^4+5x^3-x^2-2x & x^2-3x+2 & \\ \cline{1-1}
-x^3+5x^2-8x+4 & 0 & \\
-2x^3+10x^2-16x+8 & & \\
+2x^3-5x^2+x+2 & & \\ \cline{1-1}
5x^2-15x+10 & & \\
x^2-3x+2 & &
\end{array}
$$

On a multiplié deux fois le premier dividende par 2 afin d'éviter les fractions, et on a simplifié le reste en le divisant par 5. Le plus grand commun diviseur des deux polynômes est x^2-3x+2. Il y a donc deux racines communes qui seront données par l'équation

$$x^2-3x+2=0;$$

ces deux racines communes sont 1 et 2.

2° Résoudre l'équation

$$x^4-4x^3+4x^2-4x+3=0,$$

sachant que l'une des racines surpasse une autre racine de 2. Posons $x=x'+2$, et remplaçons x par cette valeur dans l'équation proposée, nous formerons la nouvelle équation

$$(x'+2)^4-4(x'+2)^3+4(x'+2)^2-4(x'+2)+3=0,$$

ou, en développant et supprimant l'accent,

$$x^4+4x^3+4x^2-4x-5=0.$$

De la relation $x = x' + 2$, on déduit $x' = x - 2$; les valeurs de x', ou les racines de la nouvelle équation, sont inférieures de deux unités aux valeurs de x, c'est-à-dire aux racines de l'équation proposée; celle-ci ayant deux racines telles que a et $a + 2$, la seconde admettra les racines $a - 2$ et a; il en résulte que les deux équations ont une racine commune a, et par suite, les deux polynômes un plus grand commun diviseur du premier degré. En cherchant ce plus grand commun diviseur, on trouve $x - 1$. Ainsi l'équation proposée admet la racine 1, et, par conséquent, la racine $1 + 2$ ou 3; connaissant deux racines, la division par $x - 1$ et par $x - 3$ ramènera l'équation à une équation du second degré $x^2 + 1 = 0$, qui donnera les deux autres racines.

CHAPITRE III.

RACINES ÉGALES.

177. Nous avons expliqué (nº 163) comment on décompose un polynôme entier $f(x)$ du degré m en un produit de m facteurs du premier degré

$$f(x) = A(x - a)(x - b)(x - c) \ldots\ldots (x - k).$$

Cette décomposition ne suppose pas que les quantités $a, b, c, \ldots\ldots, k$, soient différentes les unes des autres. Si parmi ces quantités plusieurs sont égales entre elles, on dit que l'équation a des racines égales.

Supposons $b = a$; le polynôme contient le facteur $(x - a)^2$,

et la racine a est dite racine *double*. De même, si $a=b=c$, le polynôme contient le facteur $(x-a)^3$ et la racine a est racine *triple*. En général, lorsque le polynôme contient le facteur $(x-a)^n$, on dit que l'équation a n racines égales à a, ou que la racine a est du degré n de multiplicité. De cette manière, les théorèmes généraux sur les équations subsistent : ainsi, en tenant compte du degré de multiplicité des racines, une équation du degré m a toujours m racines, etc.

Quand x, variant d'une manière continue, passe par une racine a, le polynôme s'annule, mais il ne change pas toujours de signe. Appelons n le degré de multiplicité de la racine ; posons

$$f(x)=(x-a)^n \times \varphi(x),$$

et attribuons successivement à x les valeurs $a-h$ et $a+h$, h étant une quantité positive très-petite, on a

$$f(a-h)=(-h)^n \times \varphi(a-h),$$
$$f(a+h)=h^n \times \varphi(a+h).$$

On peut supposer la quantité h assez petite pour que le polynôme $\varphi(x)$ n'ait aucune racine comprise entre $a-h$ et $a+h$; les deux quantités $\varphi(a-h)$ et $\varphi(a+h)$ ont donc le même signe; on voit par là que les quantités $f(a-h)$ et $f(a+h)$ ont le même signe si n est un nombre pair, des signes contraires si n est un nombre impair. Ainsi, *le polynôme change de signe quand* x *passe par une racine simple ou d'un degré impair de multiplicité; il ne change pas de signe quand* x *passe par une racine d'un degré pair de multiplicité.*

On peut remarquer que, dans ce dernier cas, la valeur zéro, que prend le polynôme pour $x=a$, est un maximum ou un minimum.

178. Théorème. ***Une racine d'ordre* n *annule le polynôme et ses* n — 1 *premières dérivées, et réciproquement.***

Soit $f(x)=0$ l'équation proposée. Nous pouvons écrire $f(x)=f(a+x-a)$, et, regardant $x-a$ comme un accroissement, développer suivant la loi connue; nous aurons

$$(1)\quad f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1}(x-a)+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2+\ldots\ldots$$

Le premier terme $f(a)$ étant nul, puisque a est racine, on peut diviser par $x-a$, ce qui donne

$$\frac{f(x)}{x-a}=\frac{f'(a)}{1}+\frac{f''(a)}{1.2}(x-a)+\frac{f'''(a)}{1.2.3}(x-a)^2+\ldots\ldots$$

Si a est racine double, le quotient, devant contenir encore une fois le facteur $x-a$, s'annulera pour $x=a$; mais pour $x=a$, il se réduit à $f'(a)$; on a donc $f'(a)=0$, et la racine double vérifie l'équation $f'(x)=0$. En divisant par $x-a$, on obtient le nouveau quotient

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2}=\frac{f''(a)}{1.2}+\frac{f'''(a)}{1.2.3}(x-a)+\ldots\ldots$$

Si a est racine triple, ce dernier quotient, devant contenir encore le facteur $x-a$, s'annulera pour $x=a$, et l'on aura $f''(a)=0$. Ainsi une racine triple annule le polynôme $f(x)$ et ses deux premières dérivées. En effectuant la division, on a

$$\frac{f(x)}{(x-a)^3}=\frac{f'''(a)}{1.2.3}+\frac{f^{\text{IV}}(a)}{1.2.3.4}(x-a)+\ldots\ldots$$

Si a est racine quadruple, ce dernier quotient, devant contenir encore le facteur $x-a$, s'annulera pour $x=a$, et l'on aura $f'''(a)=0$. Ainsi une racine quadruple annule le

polynôme et ses trois premières dérivées. En continuant ainsi de proche en proche, on voit qu'une racine du degré n de multiplicité annule le polynôme $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées.

La réciproque est vraie : si a annule le polynôme $f(x)$ et ses $n-1$ premières dérivées, elle est racine du degré n de multiplicité de l'équation $f(x)=0$. Car le développement (1) se réduit alors à

$$f(x)=\frac{f^n(a)}{1.2.....n}(x-a)^n+\frac{f^{n+1}(a)}{1.2.....(n+1)}(x-a)^{n+1}+.....,$$

ou, en mettant $(x-a)^n$ en facteur, à

$$f(x)=(x-a)^n\left[\frac{f^n(a)}{1.2.....n}+\frac{f^{n+1}(a)}{1.2.....(n+1)}(x-a)+......\right].$$

Le polynôme $f(x)$ contenant le facteur $(x-a)^n$, a est racine d'ordre n.

Il résulte de ces deux propositions qu'une racine d'ordre n annule le polynôme et ses $n-1$ premières dérivées, mais n'annule pas la dérivée suivante.

179. Corollaire I. Les racines simples de l'équation $f(x)=0$ ne vérifient pas l'équation $f'(x)=0$.

Les racines doubles de l'équation $f(x)=0$ sont racines simples de l'équation $f'(x)=0$; car elles annulent le polynôme $f'(x)$, et n'annulent pas sa dérivée $f''(x)$.

Les racines triples de l'équation $f(x)=0$ sont racines doubles de l'équation $f'(x)=0$; car elles annulent le polynôme $f'(x)$ et sa première dérivée $f''(x)$, et n'annulent pas la dérivée suivante.

En général, une racine d'ordre n de l'équation $f(x)=0$ est racine d'ordre $n-1$ de l'équation $f'(x)=0$.

180. Corollaire II. Il résulte de là que *le plus grand commun diviseur entre un polynôme et sa dérivée est le produit des facteurs multiples qui composent le polynôme proposé, l'exposant de chacun d'eux étant diminué d'une unité.* En effet, les racines simples de l'équation $f(x) = 0$ ne vérifiant pas l'équation $f'(x) = 0$, les facteurs simples du polynôme $f(x)$ n'entrent pas dans la dérivée $f'(x)$. Les racines doubles de l'équation $f(x) = 0$ étant racines simples de l'équation $f'(x) = 0$, les facteurs doubles entrent au premier degré dans la dérivée. En général, soit $(x-a)^n$ un facteur multiple du polynôme proposé $f(x)$, la racine a d'ordre n étant racine d'ordre $n-1$ de la dérivée, le polynôme $f'(x)$ contiendra le facteur $(x-a)^{n-1}$.

On peut démontrer directement cette proposition en prenant la dérivée du polynôme proposé $f(x)$. Supposons que ce polynôme admette les facteurs multiples $(x-a)^n$, $(x-b)^p$, $(x-c)^q$, et les facteurs simples $(x-d)$, $(x-e)$,... de telle sorte que

$$f(x) = A(x-a)^n (x-b)^p (x-c)^q (x-d)(x-e)....$$

En prenant la dérivée de ce produit, suivant la loi connue, on a

$$\begin{aligned} f'(x) = {} & nA(x-a)^{n-1}(x-b)^p (x-c)^q (x-d)(x-e)\ldots\ldots \\ & + pA(x-a)^n (x-b)^{p-1}(x-c)^q (x-d)(x-e)\ldots\ldots \\ & + qA(x-a)^n (x-b)^p (x-c)^{q-1}(x-d)(x-e)\ldots\ldots \\ & + A(x-a)^n (x-b)^p (x-c)^q (x-e)\ldots\ldots\ldots \\ & + A(x-a)^n (x-b)^p (x-c)^q (x-d)\ldots\ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Tous les termes contenant le facteur

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1},$$

on peut écrire

$$f'(x) = A(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}$$

$$\times \left[\begin{array}{l} n(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) \ldots\ldots \\ +p(x-a)(x-c)(x-d)(x-e) \ldots\ldots \\ +q(x-a)(x-b)(x-d)(x-e) \ldots\ldots \\ +\ (x-a)(x-b)(x-c)(x-e) \ldots\ldots \\ +\ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right].$$

On voit déjà que le polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ admettent le diviseur commun

$$(x-a)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}.$$

C'est le plus grand commun diviseur. En effet, dans l'expression de $f'(x)$, tous les termes de la parenthèse, excepté le premier, contiennent le facteur $x-a$; si l'on fait $x=a$ dans cette parenthèse, tous les termes s'annulant excepté le premier, la parenthèse ne devient pas nulle; elle n'admet donc pas le facteur $x-a$. De même, tous les termes de la parenthèse contenant le facteur $x-b$, excepté le second, la parenthèse n'est pas divisible par $x-b$, et ainsi de suite. La parenthèse n'admet donc aucun des facteurs premiers $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, $x-e$, ..., qui composent le polynôme proposé. On en conclut que le plus grand commun diviseur entre les deux polynômes $f(x)$ et $f'(x)$ est bien

$$(a-x)^{n-1}(x-b)^{p-1}(x-c)^{q-1}.$$

181. D'après cela, pour voir si une équation $f(x)=0$ a des racines égales, on cherchera le plus grand commun diviseur algébrique entre le polynôme $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$. Si ces deux polynômes n'ont pas de plus grand com-

mun diviseur, on en conclura que l'équation proposée n'a pas de racines égales. Si ces deux polynômes ont un plus grand commun diviseur du premier degré, l'équation proposée a deux racines égales. Si le plus grand commun diviseur est du second degré, l'équation admet deux racines doubles ou une racine triple ; deux racines doubles, lorsque le plus grand commun diviseur a ses deux racines inégales ; une racine triple, lorsque le plus grand commun diviseur a ses deux racines égales. En général, si k désigne le nombre des facteurs différents qui composent le polynôme proposé, l'exposant de chacun de ces facteurs étant diminué d'une unité, le plus grand commun diviseur est du degré $m-k$.

Comme application, nous chercherons la condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients de l'équation du troisième degré

$$x^3+px+q=0,$$

pour que cette équation ait deux racines égales. Le polynôme x^3+px+q et sa dérivée $3x^2+p$ doivent admettre un commun diviseur du premier degré ; si l'on effectue l'opération du plus grand commun diviseur, quand on sera arrivé à un diviseur du premier degré, on devra trouver un reste nul.

$$\begin{array}{rr|c|l}
 & & x & 3x-9q \\
 & x^3+px+q & 3x^2+p & 2px+3q \\
\hline
 & 3x^3+3px+3q & 6px^2+2p^2 & \\
 & -3x^3-px & -6px^2-9qx & \\
\hline
 & 2px+3q & -9qx+2p^2 & \\
 & & -18pqx+4p^3 & \\
\hline
 & & 4p^3+27q^2. &
\end{array}$$

Ainsi la condition demandée est $4p^3+27q^2=0$, ou

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0.$$

L'équation $2px+3q=0$, que l'on obtient en égalant le plus grand commun diviseur à zéro, donne la racine double $x=-\frac{3q}{2p}$. La somme des racines étant nulle, la troisième racine est $\frac{3q}{p}$.

Par exemple, les coefficients de l'équation

$$x^3-27x+54=0$$

vérifiant la condition précédente, l'équation a deux racines égales à $+3$; la troisième racine est -6.

182. Expliquons maintenant comment on ramène la résolution d'une équation qui a des racines égales à celle d'autres équations de degrés moindres dont les racines sont inégales. Soit $X=0$ une équation qui admet des racines de différents ordres, par exemple, des racines simples, des racines doubles, triples ou quadruples. Si l'on désigne par X_1 le produit des facteurs simples, par X_2 le produit des facteurs binômes qui correspondent aux racines doubles, chacun étant pris seulement au premier degré, et de même par X_3 et X_4 les produits des facteurs binômes qui correspondent aux racines triples ou quadruples, on écrira le polynôme X sous la forme

$$X=X_1X_2^2X_3^3X_4^4.$$

Cherchons le plus grand commun diviseur D entre le polynôme X et sa dérivée; ce plus grand commun divi-

seur étant égal au produit des facteurs multiples dont on diminue les exposants d'une unité, on aura

$$D = X_2 X_3^2 X_4^3.$$

De même, le plus grand commun diviseur entre le polynôme D et sa dérivée sera

$$D_1 = X_3 X_4^2,$$

et enfin le plus grand commun diviseur entre le polynôme D_1 et sa dérivée sera

$$D_2 = X_4.$$

En divisant deux à deux les polynômes précédents, on obtient les quotients

$$\frac{X}{D} = Q = X_1 X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = X_2 X_3 X_4,$$

$$\frac{D_1}{D_2} = Q_2 = X_3 X_4.$$

Divisant chacun de ces nouveaux polynômes par le suivant, on a enfin

$$\frac{Q}{Q_1} = X_1,$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = X_2,$$

$$\frac{Q_2}{D_2} = X_3,$$

$$D_2 = X_4.$$

Une fois trouvés ces polynômes X_1, X_2, X_3, X_4, la résolution de l'équation proposée est ramenée à celle des équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0, \quad X_4 = 0,$$

qui n'ont plus de racines égales; la première donne les racines simples de l'équation proposée, la seconde les racines doubles, la troisième les racines triples, etc.

Ainsi, *pour ramener la résolution d'une équation qui a des racines égales à celles d'autres équations de degrés moindres ayant leurs racines inégales, on cherche le plus grand commun diviseur entre le premier nombre de l'équation et sa dérivée, le plus grand commun diviseur entre ce premier plus grand commun diviseur et sa dérivée, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un polynôme premier avec sa dérivée; on divise ensuite le polynôme proposé par le premier plus grand commun diviseur, le premier par le second, et ainsi de suite; on divise, enfin, chacun de ces quotients par le suivant, et l'on égale à zéro ces nouveaux quotients. On obtient de la sorte des équations donnant, la première les racines simples, la seconde les racines doubles, la troisième les racines triples, ..., de l'équation proposée.*

Exemple.

Soit l'équation du septième degré

$$X = x^7 - 2x^5 - x^4 + x^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

En cherchant le plus grand commun diviseur entre le polynôme X et sa dérivée, on trouve

$$D = x^3 - x^2 - x + 1;$$

en cherchant le plus grand commun diviseur entre le polynôme D et sa dérivée, on trouve

$$D_1 = x - 1;$$

ce dernier polynôme est premier avec sa dérivée. Divisant ces polynômes l'un par l'autre, on a les quotients

$$\frac{X}{D} = Q = x^4 + x^3 - x - 1,$$
$$\frac{D}{D_1} = Q_1 = x^2 - 1,$$
$$D_1 = x - 1.$$

De nouvelles divisions donnent

$$\frac{Q}{Q_1} = x^2 + x + 1,$$
$$\frac{Q_1}{D_1} = x + 1,$$
$$D_1 = x - 1;$$

et l'on arrive aux trois équations

$$x^2 + x + 1 = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x - 1 = 0.$$

La première donne deux racines simples imaginaires, la seconde une racine double -1, la troisième une racine triple $+1$.

CHAPITRE IV.

RACINES COMMENSURABLES.

Recherche des racines entières.

183. Soit

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

l'équation proposée, dont nous supposons tous les coefficients commensurables et même entiers ; car s'ils n'étaient pas entiers, on les rendrait tels en multipliant tous les termes de l'équation par un nombre convenable. Nous avons expliqué (n° 162) comment on effectue la division par $x - a$ du

polynôme $f(x)$ ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x; le premier coefficient du quotient est égal au premier coefficient du dividende, et l'on forme chacun des autres coefficients en multipliant le coefficient précédent par a et ajoutant le coefficient correspondant du dividende. Si tous les coefficients du dividende sont entiers, si, de plus, a est un nombre entier, positif ou négatif, il est clair que le quotient ainsi formé aura aussi tous ses coefficients entiers, puisqu'on les obtient en combinant des nombres entiers par multiplication et par addition.

Imaginons maintenant qu'ayant ordonné le polynôme par rapport aux puissances croissantes de x,

$$f(x) = A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + \ldots\ldots + A_1x^{m-1} + A_0x^m,$$

on le divise par $a-x$; le diviseur étant seulement changé de signe, le quotient changera simplement de signe, et par conséquent aura toujours ses coefficients entiers. Effectuons cette division

$$\begin{array}{r|l}
A_m + A_{m-1}x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 \ldots + A_0x^m & a - x \\ \cline{2-2}
(C_{m-1} + A_{m-1})x + A_{m-2}x^2 + A_{m-3}x^3 \ldots + A_0x^m & C_{m-1} + C_{m-2}x + C_{m-3}x^2 \ldots + C_1x^{m-2} + C_0x^{m-1} \\
(C_{m-2} + A_{m-2})x^2 + A_{m-3}x^3 \ldots + A_0x^m & \\
(C_{m-3} + A_{m-3})x^3 \ldots + A_0x^m & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
(C_1 + A_1)x^{m-1} + A_0x^m & \\
(C_0 + A_0)x^m &
\end{array}$$

Le premier coefficient est $\frac{A_m}{a}$; ce nombre doit être entier; ainsi, une première condition à laquelle doit satisfaire une racine entière, c'est de diviser exactement le dernier terme A_m de l'équation. Pour abréger, représentons par C_{m-1} le premier terme du quotient; multiplions-le par le diviseur $a-x$ et retranchons du dividende; le produit par a

détruira le premier terme A_m du dividende, le produit par $-x$ s'ajoutera au second terme; de sorte que le second dividende aura pour premier terme $(C_{m-1}+A_{m-1})\,x$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par a, on aura le second terme $\frac{C_{m-1}+A_{m-1}}{a}x$ du quotient : ce second coefficient doit être entier; appelons-le C_{m-2}. Multiplions le second terme $C_{m-2}x$ du quotient par $a-x$ et retranchons du dividende; le produit par a détruit le premier terme du second dividende, le produit par $-x$ s'ajoute au second terme; de sorte que le troisième dividende aura pour premier terme $(C_{m-2}+A_{m-2})x^2$, les termes suivants restant les mêmes que dans le dividende proposé. Si l'on divise ce premier terme par a, on aura le troisième terme $\frac{C_{m-2}+A_{m-2}}{a}x^2$ du quotient; ce troisième coefficient, que nous représenterons par C_{m-3}, doit être entier, etc.

La loi est générale : on obtient un coefficient quelconque du quotient en ajoutant au précédent le coefficient du terme qui occupe dans le dividende le même rang que le terme que l'on veut former, et divisant la somme par a.

On arrivera ainsi au dernier dividende

$$(C_1+A_1)x^{m-1}+A_0x^m,$$

qui donnera le dernier terme $\frac{C_1+A_1}{a}x^{m-1}$ du quotient; le dernier coefficient $\frac{C_1+A_1}{a}$, que nous représenterons par C_0, doit aussi être entier. En multipliant le diviseur par le dernier terme C_0x^{m-1} du quotient et retranchant du dividende, on obtient le reste de la division $(C_0+A_0)x^m$. Si a est ra-

cine de l'équation, le reste est nul, et l'on a $C_0 + A_0 = o$.

184. Il résulte de ce qui précède que si l'on veut trouver les racines entières d'une équation à coefficients entiers ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, on n'essayera que les diviseurs du dernier terme, et l'on procédera de la manière suivante :

Règle. *Pour voir si un nombre entier* a *est racine de l'équation, on divisera le dernier terme par ce nombre; on ajoutera au quotient le coefficient de l'avant-dernier terme, et l'on divisera la somme par* a; *on ajoutera au quotient le coefficient du terme précédent, et l'on divisera la somme par* a, *et ainsi de suite. Toutes ces divisions doivent se faire exactement, et quand on aura ajouté le coefficient du premier terme de l'équation, on devra trouver un résultat égal à zéro.*

Lorsqu'un nombre entier a satisfait à toutes ces conditions, il est évidemment racine de l'équation; c'est ce qu'indique spécialement la dernière condition, qui exprime que le reste de la division du premier membre de l'équation par $a - x$ ou par $x - a$ est nul. On abaissera alors le degré de l'équation proposée en divisant son premier membre par $x - a$; mais il est à remarquer que le quotient est tout calculé; les coefficients de ce quotient sont précisément les quotients entiers obtenus dans les opérations précédentes changés de signes. On continuera les essais, non plus sur l'équation proposée, mais sur l'équation simplifiée.

Exemples.

1° Trouver les racines entières de l'équation

$$x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 6 = o.$$

On commencera par essayer 1 ; pour que 1 soit racine, il faut que la somme des coefficients positifs égale celle des coefficients négatifs : c'est ce qui a lieu : douc 1 est racine. On divisera le premier membre de l'équation par $x-1$, d'après la règle du n° 162, et l'on aura à considérer l'équation

$$x^5-6x^3-6x^2-7x-6=0.$$

Cette équation n'admet plus la racine 1; on essayera -1 : si l'on remplace x par -1, on a un résultat nul

$$-1+6-6+7-6=0;$$

donc -1 est racine. On divisera l'équation par $x+1$, d'après la même règle, et l'on aura l'équation

$$x^4-x^3-5x^2-x-6=0.$$

Après s'être assuré que cette équation n'admet plus pour racine -1, on essayera les diviseurs du dernier terme 6, pris avec le signe + ou le signe —. Essayons d'abord le diviseur le plus simple $+2$, et pour cela procédons d'après la règle formulée plus haut; parcourant le polynôme de droite à gauche, nous dirons : le dernier terme -6 divisé par 2 donne -3; ajoutons le coefficient suivant -1, on a -4 qui, divisé par 2, donne -2 : ajoutant le coefficient suivant -5, on a -7, qui n'est pas divisible par 2 : ainsi 2 n'est pas racine.

Essayons maintenant -2, et écrivons les quotients successifs de droite à gauche,

$$-1,\quad +3,\quad -1,\quad +3.$$

Le dernier terme -6 divisé par -2 donne $+3$; ajoutant -1, on a $+2$ qui, divisé par -2, donne -1; ajoutant -5, on a -6 qui, divisé par -2, donne $+3$; ajoutant

-1, on a $+2$ qui, divisé par -2, donne -1; ajoutant le premier coefficient $+1$, on obtient pour résultat zéro. Ainsi -2 est racine. Les nombres écrits plus haut, changés de signes, sont les coefficients du quotient de la division du premier membre de l'équation par $x+2$; on écrira donc immédiatement l'équation

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$$

Le nombre -2 ne peut être une seconde fois racine, puisqu'il ne divise plus le dernier terme. Les seuls nombres à essayer sont maintenant les diviseurs de 3, savoir $+3$ et -3. Si l'on essaye $+3$, on a les quotients

$$-1, \quad 0, \quad -1;$$

donc $+3$ est racine, et, en divisant par $x-3$, on arrive à l'équation du second degré

$$x^2 + 1 = 0,$$

qui a deux racines imaginaires $+i$ et $-i$.

L'équation proposée est complétement résolue : ses six racines sont $+1$, -1, -2, $+3$, $+i$, $-i$.

2° Déterminer les racines entières de l'équation

$$2x^3 - 12x^2 + 13x - 15 = 0.$$

La transformée en $-x$ ne présentant pas de variation, l'équation proposée n'a pas de racine négative. On n'essayera donc que des nombres positifs. Après avoir reconnu que -1 n'est pas racine, on essayera les diviseurs de 15. Voici le tableau des opérations :

$$\begin{array}{rrrrl}
2x^3 & -12x^2 & +13x & -15 = 0 & \\
 & & & -5 & \mid +3 \\
-2 & +2 & -3 & & \mid +5
\end{array}$$

Le nombre 5 est racine. Divisant par $x-5$, on aura à résoudre l'équation du second degré

$$2x^2-2x+3=0.$$

3° Trouver les racines entières de l'équation

$$x^5-4x^4-101x^3+14x^2+504x+576=0.$$

Après avoir reconnu que $+1$ et -1 ne sont pas racines, on essayera les diviseurs de 576, en commençant par les plus faibles.

x^5	$-4x^4$	$-101x^3$	$+14x^2$	$+504x$	$+576=0$	
	$+24$	$+52$	$+205$	$+396$	$+288$	$+2$
		$+27$	$+47$	-108	-288	-2
			$+82$	$+232$	$+192$	$+3$
			$+30$	-104	-192	-3
			$+44$	$+162$	$+144$	$+4$
			$+19$	-90	-144	-4
			$+19$	$+100$	$+96$	$+6$
			$+9$	-68	-96	-6
				$+72$	$+72$	$+8$
	-1	$+12$	$+5$	-54	-72	-8
	x^4	$-12x^3$	$-5x^2$	$+54x$	$+72=0$	
					-9	-8
					$+8$	$+9$
					-8	-9
		-1	0	$+5$	$+6$	$+12$
		x^3	$-5x$	$-6=0.$		

Cette dernière équation n'a plus de racines entières. Ainsi l'équation proposée admet deux racines entières -8 et $+12$.

185. Remarque. Souvent on diminue beaucoup le nombre

des essais en cherchant des limites qui comprennent toutes les racines de l'équation proposée. On appelle *limite supérieure* des racines positives d'une équation un nombre plus grand que la plus grande racine positive.

Considérons d'abord une équation qui ne présente qu'une seule variation

$$x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 5x - 60 = 0.$$

Cette équation, n'ayant qu'une variation, n'admet qu'une seule racine positive a. Imaginons que l'on fasse croître x de zéro à $+\infty$; tant que x reste inférieur à la racine a, le polynôme conserve une valeur négative. Dès que x dépasse a, le polynôme devient positif; l'équation n'ayant pas d'autre racine positive, le polynôme ne change plus de signe et par conséquent reste constamment positif au delà de a. On en conclut que toute quantité qui rend le polynôme positif est plus grande que a, ce qui donne une limite supérieure de la racine positive. Dans l'exemple actuel, 4 est une limite supérieure.

Soit maintenant une équation quelconque

$$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 58x^2 - 144 = 0.$$

Partageons-la en groupes de termes ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, et ne renfermant chacun qu'une variation,

$$x^3(x^2 - 6x - 5) + (58x^2 - 144) = 0.$$

En substituant des nombres entiers consécutifs, on voit que $x = 7$ rend positif le premier groupe ainsi que le second; pour toutes les valeurs de x supérieures à 7 les deux groupes ayant des valeurs positives, le polynôme a

aussi une valeur positive; donc 7 est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

On obtient de la même manière une limite supérieure des racines négatives. Si l'on change le signe de x, l'équation devient

$$x^5 + 6x^4 - 5x^3 - 58x^2 + 144 = 0;$$

on l'écrira

$$x^2(x^3 + 6x^2 - 5x - 58) + 144 = 0.$$

Le nombre 3, rendant positif le premier groupe, est une limite supérieure des racines positives de cette équation. Ainsi toutes les racines réelles de l'équation proposée sont comprises entre -3 et $+7$.

D'après cela, si l'on veut chercher les racines entières de l'équation

$$x^5 - 6x^4 - 5x^3 + 58x^2 - 144 = 0,$$

il suffira d'essayer les diviseurs de 144 qui sont compris entre -3 et $+7$. On trouve d'abord les racines -2 et $+3$, ce qui réduit l'équation à

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 24 = 0.$$

Les nombres $+4$ et $+6$ ne sont pas racines; il est inutile de pousser les essais au delà; il est certain que cette dernière équation n'a plus de racine entière.

Recherche des racines commensurables fractionnaires.

186. Nous supposons toujours que l'équation

$$(1)\qquad A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

a ses coefficients entiers. Une racine commensurable quel-

conque pourra être mise sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{a}{b}$, et l'on aura

$$A_0\frac{a^m}{b^m}+A_1\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}}+\ldots\ldots+A_{m-1}\frac{a}{b}+A_m=0.$$

Si l'on multiplie par b^{m-1}, cette relation devient

$$\frac{A_0a^m}{b}=-(A_1a^{m-1}+A_2ba^{m-2}+\ldots\ldots+A_mb^{m-1});$$

le second membre étant entier, le premier doit l'être aussi; mais b est premier avec a et par suite avec a^m; donc b divise A_0. Ainsi, *toute racine commensurable a pour dénominateur un diviseur du premier coefficient de l'équation.*

En multipliant par b^m et divisant par a, on a de même

$$\frac{A_mb^m}{a}=-(A_0a^{m-1}+A_1ba^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1}b^{m-1});$$

le second membre étant entier, le premier l'est aussi; or a est premier avec b^m; donc a divise A_m. Ainsi *le numérateur est un diviseur du dernier coefficient de l'équation.*

Il résulte de là qu'*une équation à coefficients entiers, dont le premier coefficient est l'unité, n'a pas de racine commensurable fractionnaire.* En effet, le dénominateur d'une racine commensurable, devant diviser le premier coefficient qui est l'unité, est lui-même égal à un, et par conséquent la racine est entière. Ainsi, dans ce cas, toutes les racines commensurables sont entières.

Ceci nous donne un moyen facile de ramener la recherche des racines commensurables fractionnaires à celle des racines entières. On conçoit, en effet, que si l'on multiplie

par un nombre entier convenable les racines de l'équation proposée, on rendra entières toutes les racines commensurables fractionnaires. Posons donc $x' = kx$, d'où $x = \frac{x'}{k}$, et dans l'équation proposée remplaçons x par $\frac{x'}{k}$, nous obtiendrons la nouvelle équation

$$\frac{A_0 x'^m}{k^m} + \frac{A_1 x'^{m-1}}{k^{m-1}} + \frac{A_2 x'^{m-2}}{k^{m-2}} + \ldots\ldots + A_m = 0.$$

Déterminons maintenant le nombre entier k de manière qu'en chassant les dénominateurs pour rendre les coefficients entiers, on réduise en même temps le premier coefficient à l'unité. Cette opération réussira toujours quand on prendra $k = A_0$; en effet, si l'on multiplie par k^{m-1}, on met l'équation sous la forme

$$\frac{A_0}{k} x'^m + A_1 x'^{m-1} + A_2 k x'^{m-2} + \ldots\ldots + A_m k^{m-1} = 0;$$

si $k = A_0$, cette équation devient, l'accent étant supprimé,

$$(2) \quad x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 A_0 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m A_0^{m-1} = 0.$$

Cette dernière équation, dont les coefficients sont entiers et le premier coefficient égal à l'unité, a toutes ses racines commensurables entières. Nous avons posé $x = \frac{x'}{k}$, c'est-à-dire que les racines de l'équation (1) sont égales à celles de l'équation (2) divisées par k ; ainsi, quand on aura trouvé les racines entières de l'équation transformée (2), en les divisant par k, on obtiendra toutes les racines commensurables de l'équation proposée.

On comprend pourquoi l'opération réussit toujours quand on prend $k = A_0$; les racines commensurables ayant pour

dénominateur des diviseurs de A_0, il est clair que ces racines, multipliées par A_0, deviennent toutes entières.

Lorsqu'il s'agit de trouver les racines commensurables d'une équation, on commence par chercher les racines entières, et, s'il y en a, on divise l'équation par les facteurs binômes correspondants. On détermine ensuite les racines fractionnaires à l'aide des racines entières de l'équation (2); mais, dans la recherche des racines entières de cette dernière équation, il est inutile de pousser les essais jusqu'au dernier terme; car la plus grande racine de l'équation proposée étant au plus égale à A_m divisé par le plus petit diviseur de A_0, la plus grande racine entière de l'équation (2) sera au plus égale à k fois celle-ci; on s'arrêtera à cette limite.

Exemples.

1° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$(1) \qquad 2x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 12 = 0.$$

On trouve d'abord la racine entière -2; divisant par $x+2$, l'équation se réduit à

$$(2) \qquad 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0.$$

Cette équation n'ayant plus de racine entière, on la transforme en remplaçant x par $\frac{x}{2}$, ce qui donne

$$(3) \qquad x^3 - 3x^2 - 8x + 24 = 0.$$

Les racines fractionnaires de l'équation (2) ne pouvant être que $\mp \frac{1}{2}$ et $\pm \frac{3}{2}$, on cherchera les racines entières de l'équation (3) seulement parmi les nombres ± 1 et ± 3;

on trouve que $+3$ est racine; ainsi l'équation proposée admet la racine fractionnaire $\frac{3}{2}$. La dernière équation divisée par $x-3$ conduit à l'équation du second degré

$$x^2-8=0$$

qui a deux racines incommensurables $\pm 2\sqrt{2}$, d'où résultent pour l'équation proposée les racines incommensurables $\pm\sqrt{2}$. Ainsi les quatre racines de l'équation proposée sont -2, $\frac{3}{2}$, $+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

2° L'équation

$$(1) \qquad 4x^4-28x^3+45x^2-6x-18=0$$

n'a pas de racine entière. Si l'on remplace x par $\frac{x}{k}$, et si l'on multiplie par k^2, elle devient

$$\frac{4x^4}{k^2}-\frac{28x^3}{k}+45x^2-6kx-18k^2=0;$$

pour opérer la transformation, il suffit de prendre $k=2$, ce qui donne

$$(2) \qquad x^4-14x^3+45x^2-12x-72=0.$$

Les racines fractionnaires de l'équation proposée, devenant entières quand on les multiplie par 2, ne peuvent être que $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{9}{2}$; on essayera donc ± 1, ± 3, ± 9.

L'équation (2) admet la racine -1; la divisionpar $x+1$ donne l'équation

$$x^3-15x^2+60x-72=0.$$

Cette dernière admet la racine 3; la division par $x-3$

conduit à l'équation du second degré

$$x^2 - 12x + 24 = 0,$$

dont les racines $x = 6 \pm \sqrt{12}$ sont incommensurables. Ainsi les quatre racines de l'équation proposée sont $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3 \pm \sqrt{3}$.

187. Deuxième méthode. Il est à remarquer que lorsqu'une équation

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

a ses coefficients entiers et que l'on divise le premier membre par le facteur binôme $x - \frac{a}{b}$, qui correspond à une racine commensurable fractionnaire $\frac{a}{b}$, le quotient a aussi ses coefficients entiers. Supposons que l'on effectue la division en ordonnant, par rapport aux puissances décroissantes de x, comme nous l'avons expliqué au n° 162. Le premier coefficient du quotient est A_0; on obtient le second en multipliant le premier par $\frac{a}{b}$ et ajoutant A_1; le troisième en multipliant le second par $\frac{a}{b}$ et ajoutant A_2, et ainsi de suite. Si les coefficients du quotient ne sont pas entiers, ils ne pourront contenir à leurs dénominateurs que les facteurs premiers de b.

Supposons maintenant que l'on divise le polynôme par $\frac{a}{b} - x$, en ordonnant par rapport aux puissantes croissantes de x. On obtient le premier coefficient du quotient en divisant A_m par $\frac{a}{b}$, ce qui revient à multiplier par $\frac{b}{a}$. Si à ce

premier coefficient on ajoute A_{m-1} et si l'on multiplie par $\frac{b}{a}$, on a le second coefficient du quotient, et ainsi de suite. On en conclut que, si les coefficients du quotient ne sont pas entiers, ils ne pourront contenir à leurs dénominateurs que les facteurs premiers de a. Mais nous avons déjà vu que ces mêmes dénominateurs ne peuvent contenir que les facteurs premiers de b; comme a et b sont premiers entre eux, tous ces dénominateurs se réduisent à l'unité, et par conséquent les coefficients du quotient sont entiers.

Non-seulement les coefficients du quotient sont entiers, mais encore ils sont tous divisibles par b. Car, si l'on désigne par A_0, B_1, B_2, ... les coefficients du quotient ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, on a

$$B_1 = \frac{A_0 a}{b} + A_1,$$

$$B_2 = \frac{B_1 a}{b} + A_2,$$

$$B_3 = \frac{B_2 a}{b} + A_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Pour que B_1 soit entier, il faut que b divise A_0, ce que l'on sait déjà. Pour que B_2 soit entier, il faut que b divise B_1, et ainsi de suite.

Les deux manières d'effectuer la division peuvent être appliquées pour l'essai direct des racines commensurables fractionnaires. On choisira l'une ou l'autre, suivant les cas.

Exemples.

1° Reprenons l'équation

$$4x^4 - 28x^3 + 45x^2 - 6x - 18 = 0,$$

dont il a déjà été question. Après avoir reconnu que cette équation n'a pas de racine entière, cherchons les racines fractionnaires. Essayons d'abord $\frac{1}{2}$; si nous calculons le quotient de droite à gauche, comme pour les racines entières, il faudrait diviser successivement par $\frac{1}{2}$, ce qui revient à multiplier par 2; toutes les opérations seraient possibles, et il faudrait aller jusqu'au bout pour voir si le reste est nul. Au contraire, en calculant de gauche à droite, il faut multiplier successivement par $\frac{1}{2}$ ce qui revient à diviser par 2; nous emploierons donc de préférence ce second procédé : 4 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne 2, et —28..... — 26; —26 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne —13 et + 45..... + 32; + 32 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne + 16 et —6..... + 10; + 10 multiplié par $\frac{1}{2}$ donne + 5 et — 18.....—13. Il arrive ici que l'opération se prolonge jusqu'à la fin; mais le reste — 13 n'est pas nul; donc $\frac{1}{2}$ n'est pas racine.

Essayant $-\frac{1}{2}$ de la même manière, toutes les opérations sont possibles, et l'on arrive à un reste nul; donc $-\frac{1}{2}$ est racine, et l'on a le quotient

$$4x^3 - 30x^2 + 60x - 36 = 0,$$

ou, en divisant tous les termes par 2,

$$2x^3 - 15x^2 + 30x - 18 = 0.$$

Après avoir essayé encore une fois $-\frac{1}{2}$, on essayera $\frac{3}{2}$, mais en allant de droite à gauche : — 18 divisé par $\frac{3}{2}$ donne — 12 ; ajoutant + 30 on a + 18 qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne + 12 ; ajoutant — 15 on a — 3 qui, divisé par $\frac{3}{2}$, donne — 2 ; ajoutant le premier coefficient + 2, on obtient un résultat égal à zéro. Donc $\frac{3}{2}$ est racine, et le quotient de la division par $x - \frac{3}{2}$ est

$$2x^2 - 12x + 12 = 0,$$

ou

$$x^2 - 6x + 6 = 0.$$

Cette équation du second degré donne deux racines incommensurables.

2° Trouver les racines commensurables de l'équation

$$15x^4 + 16x^3 - 46x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Après avoir reconnu que cette équation n'a pas de racine entière, on essayera la fraction $\frac{1}{3}$ en allant de gauche à droite, et l'on verra que cette fraction est racine. Dans l'équation simplifiée, on essayera les factions $\pm\frac{1}{5}$, $\pm\frac{2}{5}$, et l'on verra que $-\frac{2}{5}$ est racine. L'équation à laquelle on arrive, ayant son premier coefficient égal à l'unité, n'a plus

de racine commensurable. Voici le tableau des calculs :

x^4	x^3	x^2	x		
$15x^4$	$+16x^3$	$-46x^2$	$-5x$	$+6=0$	
			-1	$+3$	2
		$+21$	$+4$	-3	-2
			-1	$+2$	3
				-2	-3
				$+1$	6
			$+1$	-1	-6
$15,$	$+21,$	$-39,$	$-18,$	0	$\frac{1}{3}$
$5x^3+7x^2-13x-6=0$					
$5,$	$+8$				$\frac{1}{5}$
$5,$	$+6$				$-\frac{1}{5}$
$5,$	$+9$				$\frac{2}{5}$
$5,$	$+5,$	$-15,$	$0,$		$-\frac{2}{5}$
$x^2+x-3=0.$					

188. REMARQUE I. Nous avons expliqué (n° 182) par quelle suite d'opérations, étant donné un polynôme X, on peut trouver des polynômes X_1, X_2, X_3,..... formés, le premier des facteurs simples du polynôme proposé, le second des facteurs doubles, le troisième des facteurs triples, etc. Ces opérations consistant en divisions, il est clair que si le polynôme proposé X a ses coefficients commensurables, les polynômes X_1, X_2,....., qu'on en déduit, auront aussi leurs coefficients commensurables. Supposons que le polynôme X n'ait qu'une racine a d'un même degré n de multiplicité; le polynôme X_n sera du premier degré, et par

conséquent la racine a fournie par l'équation du premier degré $X_n = o$, à coefficients commensurables, sera commensurable. Ainsi, *quand une équation à coefficients commensurables a une seule racine d'un même degré de multiplicité, cette racine est commensurable.*

189. Remarque II. Lorsqu'une équation de troisième degré admet des racines égales, elle a, ou une racine double et une simple, ou une racine triple; dans les deux cas, d'après ce qui a été dit précédemment, les racines sont commensurables.

Lorsqu'une équation du quatrième degré admet des racines égales, elle a, ou une racine double et deux racines simples, ou deux racines doubles, ou une racine triple et une racine simple, ou une racine quadruple. Dans le premier cas la racine double est commensurable, dans le troisième cas la racine triple et la racine simple le sont également, et de même dans le quatrième cas la racine quadruple. Mais, dans le second cas, les deux racines doubles, étant données par une équation du second degré, sont en général incommensurables.

Lorsqu'une équation du cinquième degré admet des racines égales, elle a ou une racine double et trois simples, ou deux racines doubles et une simple, ou une racine d'un degré égal ou supérieur à trois; dans tous ces cas, l'une au moins des racines est commensurable.

Ainsi, *quand une équation, à coefficients commensurables et d'un degré égal ou inférieur à cinq, a des racines égales, cette équation a au moins une racine commensurable, excepté quand le polynôme est du quatrième degré et carré parfait.*

Tant que le degré de l'équation ne surpasse pas cinq, on

peut donc se dispenser d'appliquer à l'équation la méthode des racines égales, qui exige en général de longs calculs. Après avoir reconnu que le polynôme n'est pas carré parfait, on appliquera à l'équation la méthode des racines commensurables; mais, quand l'équation est d'un degré plus élevé, elle peut avoir des racines égales sans avoir des racines commensurables.

Exercices.

1° Appliquer la méthode des racines égales aux équations

$$x^8-7x^7-2x^6+118x^5-259x^4-83x^3+612x^2-108x-432=0$$
$$x^9+2x^8+x^7+6x^6+7x^5-2x^4+3x^3+2x^2-12x-8=0,$$
$$x^4-8x^3+24x^2-32x+16=0.$$

2° Chercher les racines commensurables des équations

$$x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=0,$$
$$2x^3-53x+105=0,$$
$$6x^6-19x^5+13x^4-20x^3+48x^2-16=0,$$
$$15x^4+16x^3-46x^2-5x+6=0.$$

CHAPITRE V.

THÉORÈME DE ROLLE.

190. Théorème. *Deux racines réelles consécutives d'un polynôme entier comprennent au moins une racine réelle de la dérivée.*

Soient a et b deux racines réelles consécutives du polynôme entier $f(x)$; supposons a plus petite que b et imaginons que l'on fasse varier x de a à b; pour $x=a$ la fonction $f(x)$ est nulle; elle s'annule de nouveau pour $x=b$. Ainsi, quand x varie de a à b, la fonction $f(x)$ part de zéro pour revenir à zéro; comme elle reste finie et continue, elle passe par un maximum en valeur absolue; la dérivée $f(x)$ change donc de signe, et, comme elle reste elle-même finie et continue, elle passe par zéro. La dérivée, peut s'annuler plusieurs fois, parce que dans l'intervalle de a à b, la fonction $f(x)$ peut éprouver plusieurs alternatives d'augmentation et de diminution. Ce théorème est vrai pour les fonctions continues quelconques, quand la dérivée est elle-même finie et continue. Nous nous sommes servi de cette propriété au n° 137 pour la démonstration de la série de Taylor.

191. Corollaire. *Deux racines réelles consécutives de la dérivée ne comprennent pas plus d'une racine réelle du polynôme proposé.* Car si deux racines réelles consécutives a' et b' de la dérivée comprenaient deux racines réelles a et b du polynôme proposé, ces deux racines réelles a et b comprendraient elles-mêmes une racine de la dérivée, ce qui est impossible.

Mais il n'est pas certain qu'entre les deux racines consécutives a' et b' de la dérivée, il y ait une racine du polynôme proposé. Pour décider la question, il suffira de substituer a' et b' à la place de x dans le polynôme; si l'on obtient deux résultats de même signe, il n'y a aucune racine dans l'intervalle; si l'on obtient deux résultats de signes contraires, il y a une racine. Soient $a', b', c', \ldots h'$ les racines réelles de la dérivée $f'(x)$ rangées par ordre de gran-

deur croissante. Dans le polynôme $f(x)$ substituons la suite des quantités

$$-\infty,\ a',\ b',\ c',\ldots\ldots h',\ +\infty$$

et examinons les signes des résultats. Chacun des intervalles comprendra zéro ou une racine du polynôme $f(x)$, suivant que les résultats seront de même signe ou de signes contraires. Ainsi, ***quand on sait résoudre la dérivée, on peut trouver le nombre des racines réelles de l'équation proposée.***

Si n est le nombre des racines réelles de la dérivée, le nombre des intervalles étant $n+1$, on en conclut que l'équation proposée admet au plus $n+1$ racines réelles.

Équations du troisième degré.

192. Considérons l'équation du troisième degré

$$x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0.$$

Si l'on égale à zéro la dérivée, on obtient une équation du second degré

$$3x^2+2A_1x+A_2=0.$$

Pour que l'équation proposée ait ses trois racines réelles, il faut d'abord que la dérivée ait ses racines réelles. Appelons a' la plus petite racine de la dérivée, b' la plus grande, et substituons dans le polynôme du troisième degré la suite des quantités

$$-\infty,\quad a',\quad b',\quad +\infty.$$

Pour $x=-\infty$, on a un résultat négatif, pour $x=\infty$ un résultat positif; si a' donne un résultat positif, b' un résultat égatif, chacun des intervalles, présentant un changement

de signe, comprendra une racine réelle, et l'équation du troisième degré aura ses trois racines réelles.

193. Mais nous réduirons d'abord l'équation à une forme plus simple. On peut toujours, par une transformation facile, faire disparaître le second terme d'une équation. Soit l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0.$$

Posons $x = y + k$; l'équation devient

$$(y+k)^m + A_1(y+k)^{m-1} + \ldots\ldots = 0,$$

ou

$$y^m + (mk + A_1) y^{m-1} + \ldots\ldots = 0.$$

Si l'on fait $k = -\frac{A_1}{m}$, le coefficient du second terme s'évanouit, et l'equation prend la forme

$$y^m + B_2 y^{m-2} + B_3 y^{m-3} + \ldots\ldots + B_m = 0.$$

Il était aisé de prévoir ce résultat. La relation $y = x - k$ signifie que les racines de la nouvelle équation sont égales respectivement aux racines de l'équation proposée diminuées de la quantité constante k; la somme des racines de la seconde équation est égale à la somme des racines de la première, c'est-à-dire à $-A_1$, moins mk; si donc on fait $k = -\frac{A_1}{m}$, cette somme est nulle, et par conséquent le coefficient du second terme est nul.

Pour réduire l'équation du troisième degré, on posera $x = y - \frac{A_1}{3}$, et l'on ramènera ainsi l'équation à la forme plus simple

$$x^3 + px + q = 0.$$

Par cette transformation, les racines réelles restent réelles, les racines imaginaires restent imaginaires.

194. Cherchons maintenant la condition pour que l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

ait ses trois racines réelles. L'équation

$$3x^2 + p = 0$$

devant avoir ses deux racines réelles, il faut que le coefficient p soit négatif; supposons cette condition remplie; nous aurons

$$a' = -\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad b' = \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

On doit avoir en outre $f(a') > 0$, c'est-à-dire

$$-\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0,$$

ou

$$(1) \qquad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > -\frac{q}{2}.$$

La condition $f(b') < 0$ se déduira de la précédente en changeant le signe du radical et le sens de l'inégalité, ce qui donne

$$\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} < -\frac{q}{2},$$

ou

$$(2) \qquad -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} > \frac{q}{2}.$$

Le coefficient p étant négatif, les premiers membres de ces inégalités sont des quantités positives. Supposons $q > 0$; l'inégalité (1), ayant son second membre négatif, sera toujours satisfaite; l'inégalité (2) ayant ses deux membres positifs, on peut les élever au carré, et l'on en déduit

$$-\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

ou

$$(3) \qquad \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Supposons maintenant $q < 0$; c'est l'inégalité (2) qui est toujours vérifiée, et l'inégalité (1) conduit à la même inégalité (3). D'ailleurs, l'inégalité (3) ne peut être satisfaite que si le coefficient p est négatif.

Ainsi, *pour que l'équation*

$$x^3 + px + q = 0$$

ait ses trois racines réelles, il est nécessaire et il suffit que ses coefficients satisfassent à l'inégalité

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Quand le premier membre de cette inégalité est une quantité positive, l'équation n'a qu'une racine réelle. Quand cette quantité est nulle, l'équation a deux racines égales, comme nous l'avons vu au n° 181.

Exemples.

1° L'équation

$$x^3 + 5x - 2 = 0,$$

dans laquelle le coefficient du second terme est positif, n'a qu'une racine réelle ; cette racine est positive.

2° L'équation

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

a ses trois racines réelles. La transformation en $-x$ n'ayant qu'une variation, une seule racine est négative, les deux autres sont positives.

3° L'équation

$$x^3 - 6x + 6 = 0$$

n'a qu'une racine réelle. Cette racine est négative.

4° Déterminer les dimensions d'un cylindre circulaire droit, dont on connaît la surface totale et le volume.

Désignons la surface par $4\pi a^2$ et le volume par $\frac{4\pi b^3}{3}$; appelons x le rayon de la base et y la hauteur. On a les deux équations

$$(1) \quad y = \frac{4b^3}{3x^2}, \quad (2) \quad x^3 - 2a^2x + \frac{4b^3}{3} = 0.$$

L'équation (2) admet toujours une racine négative, qui ne convient pas à la question. Pour que le problème soit possible, il faut que l'équation ait une racine positive, et par conséquent ses trois racines réelles ; la condition est

$$b^3 < a^3 \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Quand cette condition est remplie, l'équation ayant deux racines positives auxquelles correspondent des valeurs positives de y, le problème admet deux solutions. Quand $b^3 = a^3 \sqrt{\frac{2}{3}}$, ces deux solutions se confondent en une seule.

Équations du quatrième degré.

195. Si l'on fait disparaître le second terme, l'équation du quatrième degré se ramène à la forme

$$(1) \qquad x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Posons $x = \frac{1}{y}$; l'équation devient

$$(2) \qquad Cy^4 + By^3 + Ay^2 + 1 = 0.$$

En égalant à zéro la dérivée, on obtient l'équation

$$4Cy^3 + 3By^2 + 2Ay = 0,$$

ou

$$y(4Cy^2 + 3By + 2A) = 0,$$

que l'on peut résoudre. On saura donc reconnaître combien l'équation (2), et par suite combien l'équation proposée, admet de racines réelles.

Soit, par exemple, l'équation

$$(3) \qquad x^4 - 2x^2 - 2x + 1 = 0,$$

que l'on ramène à l'équation

$$(4) \qquad y^4 - 2y^3 - 2y^2 + 1 = 0,$$

en posant $x = \frac{1}{y}$. La dérivée

$$2y(2y^2 - 3y - 2) = 0$$

a ses trois racines réelles $-\frac{1}{2}$, 0, $+2$. Les quantités

$$-\infty, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0, \quad +2, \quad +\infty,$$

substituées dans le polynôme (h), donnent les signes

$$+\ ,\ +\ ,\ +\ ,\ -\ ,\ +\ .$$

On en conclut que l'équation (h) a deux racines réelles et comprises, l'une entre o et 2, l'autre entre 2 et $+\infty$. L'équation proposée admet aussi deux racines réelles et comprises, l'une entre o et $\frac{1}{2}$, l'autre $\frac{1}{2}$ et $+\infty$.

196. On peut ramener la résolution d'une équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième degré.

Un polynôme du quatrième degré est le produit de quatre facteurs du premier degré $(x-a)\ (x-b)\ (x-c)\ (x-d)$. Le produit $(x-a)\ (x-b)$ de deux facteurs quelconques du premier degré donne un facteur du second degré x^2+px+q; le polynôme du quatrième degré admet donc six facteurs du second degré, et par conséquent les coefficients p et q ont six valeurs; la recherche de ces coefficients dépend donc d'une équation du sixième degré. Mais, si l'on met l'équation proposée sous la forme

$$(1) \qquad x^4+Ax^2+Bx+C=0,$$

on a $a+b+c+d=0$, d'où $a+b=-(c+d)$; les valeurs de p sont égales deux à deux et de signes contraires; l'équation du sixième degré, qui donne l'inconnue p, ne contiendra donc que des puissances paires de p, et par conséquent s'abaissera au troisième degré.

Quand on divise le polynôme x^4+Ax^2+Bx+C par x^2+px+q, on obtient un quotient du second degré $x^2-px+(A+p^2-q)$, et un reste du premier degré

$$[B+2pq-p(A+p^2)]\,x+[C-q(A+p^2-q)].$$

Ce reste devant être identiquement nul, on a les deux équations

$$B + 2pq - p(A + p^2) = 0,$$
$$C - q(A + p^2 - q) = 0.$$

De la première on déduit

$$(2) \qquad q = \frac{p(A + p^2) - B}{2p};$$

cette valeur substituée dans la seconde donne l'équation

$$(3) \qquad p^2(A + p^2)^2 - 4Cp^2 - B^2 = 0.$$

Si l'on pose $p^2 = z$, cette équation s'abaisse au troisième degré

$$(4) \qquad z(z + A)^2 - 4Cz - B^2 = 0.$$

Lorsque l'équation (1) a ses quatre racines réelles, l'équation (4) a ses trois racines réelles et positives. Lorsque l'équation (1) a deux racines réelles et inégales et deux imaginaires, ou ses quatre racine imaginaires, l'équation (4) a une racine réelle positive et deux imaginaires. Pour résoudre complétement l'équation (1), il suffit de calculer l'une des racines de l'équation (4); à cette valeur de p correspond une valeur de q donnée par l'équation (2); on connaît alors deux facteurs du second degré, le diviseur et le quotient. On résoudra donc les deux équations du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$
$$x^2 - px + (A + p^2 - q) = 0.$$

Équations trinômes.

197. La méthode dont nous avons fait usage pour trouver le nombre des racines réelles de l'équation du troisième

degré s'applique à l'équation trinôme

$$(1) \qquad x^m + Ax^n + B = 0.$$

Si l'on prend la dérivée, on obtient l'équation

$$mx^{m-1} + nAx^{n-1} = 0,$$

ou

$$(2) \qquad x^{n-1}(mx^{m-n} + nA) = 0.$$

dont on sait trouver les racines réelles.

On peut aussi l'appliquer à l'équation

$$(3) \qquad x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + C = 0;$$

Car si l'on prend la dérivée, on obtient l'équation

$$mx^{m-1} + (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} = 0,$$

ou

$$(4) \qquad x^{m-3}[mx^2 + (m-1)Ax + (m-2)B] = 0,$$

que l'on peut résoudre.

On ramène l'équation

$$x^m + Ax^2 + Bx + C = 0$$

à la forme précédente, en posant $x = \frac{1}{y}$.

LIVRE VII.

DES DIFFÉRENCES.

CHAPITRE PREMIER.

PRINCIPES DE LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES.

198. Étant donnée une suite de $m+1$ quantités

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_m,$$

si l'on retranche chacune d'elles de celle qui la suit, on a les *différences premières* de ces quantités. On est convenu de désigner ces différences par la lettre Δ. Ainsi l'on représente par Δu_0 la différence u_1-u_0, par Δu_1 la différence u_2-u_1, etc.

Les différences premières forment une suite de m quantités

$$\Delta u_0,\ \Delta u_1,\ \Delta u_2,\ \ldots,\ \Delta u_{m-1};$$

si l'on retranche de même chacune d'elles de celle qui la suit, on a les différences des différences premières, ou les *différences secondes* des quantités proposées. On les désigne par le symbole $\Delta\Delta$ ou plus simplement Δ^2. Ainsi l'on représente par $\Delta^2 u_0$ la différence $\Delta u_1 - \Delta u_0$, par $\Delta^2 u_1$ la différence $\Delta u_2 - \Delta u_1$, etc.

Les différences secondes forment une suite de $m-1$ quantités

$$\Delta^2 u_0,\ \Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ldots\ldots \Delta^2 u_{m-2},$$

dont on peut prendre les différences premières, ce qui donnera les *différences troisièmes* des quantités proposées; on désignera ces différences troisièmes par le symbole $\Delta\Delta^2$ ou plus simplement Δ^3. En continuant de la même manière, on obtiendra les différences des divers ordres des quantités proposées.

199. Les $m+1$ quantités proposées ont m différences premières, et par suite $m-1$ différences secondes, $m-2$ différences troisièmes, et enfin une seule différence de l'ordre m. On ne peut pas aller au delà. Nous disposerons le tableau des différences de la manière suivante :

u_0	Δu_0	$\Delta^2 u_0$	$\Delta^3 u_0$	$\Delta^4 u_0$	$\Delta^5 u_0$
u_1	Δu_1	$\Delta^2 u_1$	$\Delta^3 u_1$	$\Delta^4 u_1$	
u_2	Δu_2	$\Delta^2 u_2$	$\Delta^3 u_2$		
u_3	Δu_3	$\Delta^2 u_3$			
u_4	Δu_4				
u_5					

mettant dans la première colonne verticale les nombres proposés, dans la seconde colonne les différences premières, dans la troisième les différences secondes, et ainsi de suite. On remarque que l'indice de Δ reste le même dans une même colonne verticale, et l'indice de u dans une même ligne horizontale. Pour former ce tableau, *on retranche chaque nombre de celui qui est placé au-dessous de lui, et on écrit le résultat à droite du premier.* Ainsi on obtient Δu_0 en retranchant u_0 de u_1, Δu_1 en retranchant u_1 de u_2, ...; de

même $\Delta^2 u_0$ en retranchant Δu_0 de Δu_1, $\Delta^2 u_1$ en retranchant Δu_1 de Δu_2, ... On a, en général, par définition

$$\Delta^{p+1} u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n;$$

si l'on retranche $\Delta^p u_n$ du nombre $\Delta\, u_{n+1}$ placé au-dessous de lui, on obtient le nombre $\Delta^{p+1} u_n$ placé à droite du premier.

Soient, par exemple, les six nombres 1, 10, 25, 44, 70, 98. En appliquant la règle précédente, on formera le tableau des différences jusqu'au cinquième ordre :

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
1	9	6	−2	5	−13
10	15	4	3	−8	
25	19	7	−5		
44	26	2			
70	28				
98					

On commence par écrire les six nombres proposés dans une colonne verticale. Retranchant chacun d'eux du suivant, on a les différences premières 9, 15, 19, 26, 28, que l'on écrit dans une seconde colonne; retranchant chacun des nombres de cette seconde colonne du suivant, on a les différences secondes 6, 4, 7, 2, que l'on écrit dans une troisième colonne, et ainsi de suite jusqu'à la différence cinquième à laquelle s'arrête le calcul.

200. Réciproquement, si l'on donne le premier nombre u_0 et ses m différences successives Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ..., $\Delta^m u_0$, on peut reconstituer le tableau et reproduire les m autres nombres u_1, u_2, ..., u_m. En effet, puisque $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, on a $u_1 = u_0 + \Delta u_0$. De même, puisque $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0$,

on a $\Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0$; connaissant Δu_1, on obtient $u_2 = u_1 + \Delta u_1$. On a de la même manière $\Delta^2 u_1 = \Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$, $\Delta u_2 = \Delta u_1 + \Delta^2 u_1$, $u_3 = u_2 + \Delta u_2$, et ainsi de suite. On remarque que *chaque nombre du tableau égale le nombre placé au-dessus de lui, plus celui qui est à droite de ce dernier;* car on a, en général, par définition

$$\Delta^{p+1} u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n,$$

d'où l'on déduit

$$\Delta^p u_{n+1} = \Delta^p u_n + \Delta^{p+1} u_n;$$

le nombre $\Delta^p u_{n+1}$ égale le nombre $\Delta^p u_n$ placé au-dessus de lui, plus le nombre $\Delta^{p+1} u_n$ placé à droite de ce dernier.

On procède par lignes obliques, comme l'indique le tableau précédent; nous avons déjà calculé les trois premières lignes obliques; on continuera de la même manière : le nombre $\Delta^4 u_0$ ajouté à $\Delta^3 u_0$ donne $\Delta^3 u_1$; celui-ci ajouté à $\Delta^2 u_1$ donne $\Delta^2 u_2$; celui-ci ajouté à Δu_2 donne Δu_3; enfin, ce dernier ajouté à u_3 donne u_4. Recommençant à partie de $\Delta^5 u_0$, on formera successivement les nombres $\Delta^4 u_1$, $\Delta^3 u_2$, $\Delta^2 u_3$, Δu_4, u_5 de la ligne oblique suivante, et ainsi de suite. En poussant l'opération de proche en proche jusqu'à $\Delta^m u_0$, on arrivera finalement à u_m.

Soient, par exemple, le nombre 1 et ses cinq différences successives 9, 6, — 2, 5, — 13. On appliquera la règle précédente et l'on dira : 9 et 1..... 10; 6 et 9..... 15 et 10..... 25; — 2 et 6..... 4 et 15..... 19 et 25..... 44; 5 et — 2..... 3 et 4..... 7 et 19..... 26 et 44..... 70; — 13 et 5..... — 8 et 3..... — 5 et 7..... 2 et 26..... 28 et 70..... 98.

204. Nous avons vu que, lorsqu'on donne le nombre u_0 et ses m différences successives Δu_0, $\Delta^2 u_0$, ..., $\Delta^m u_0$, on

peut, par un calcul de proche en proche, trouver les nombres u_1, u_2, ..., u_m. Cherchons maintenant une formule algébrique donnant l'expression d'un terme quelconque u_n de la suite en fonction des quantités données.

Puisqu'on a par définition $\Delta u_0 = u_1 - u_0$, on en déduit

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0.$$

On a de même $u_2 = u_1 + \Delta u_1$. De la relation $\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0$ on déduit $\Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0$; si dans l'expression de u_2 on remplace u_1 et Δu_1 par leurs valeurs, il vient

$$u_2 = (u_0 + \Delta u_0) + (\Delta u_0 + \Delta^2 u_0),$$

ou plus simplement

$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0.$$

On a de même

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2.$$

Nous connaissons u_2; on en déduit facilement Δu_2. Imaginons en effet que, dans le tableau des différences (n° 199), on supprime la première colonne verticale, les différences premières constitueront les nombres proposés, les différences secondes deviendront les différences premières, et ainsi de suite. C'est comme si l'on augmentait d'une unité l'indice de la lettre Δ dans chaque terme. Or il est clair que le tableau ainsi modifié jouira des mêmes propriétés que le tableau primitif; nous avons trouvé la relation

$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0;$$

nous aurons maintenant

$$\Delta u_2 = \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

Si dans la relation $u_3 = u_2 + \Delta u_2$ on remplace u_2 et Δu_2

par leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned} u_3 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 \\ + \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 \end{aligned} = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

Le même raisonnement peut être répété indéfiniment. On a

$$u_4 = u_3 + \Delta u_3.$$

Nous connaissons u_3 ; on en déduit facilement Δu_3. Si l'on imagine comme précédemment la première colonne verticale supprimée, ce qui revient à augmenter d'une unité l'indice de la lettre Δ dans chaque terme, la relation

$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0$$

deviendra

$$\Delta u_3 = \Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + 3\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0.$$

En remplaçant u_3 et Δu_3 par leurs valeurs, on a

$$\begin{aligned} u_4 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0 \\ + \Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + 3\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0 \end{aligned} = u_0 + 4\Delta u_0 + 6\Delta^2 u_0 + 4\Delta^3 u_0 + \Delta^4 u_0.$$

On reconnaît les coefficients du développement de la puissance d'un binôme; l'expression de u_2 a pour coefficients ceux du carré d'un binôme; l'expression de u_3 ceux du cube; l'expression de u_4 ceux de la quatrième puissance. Nous ferons voir que cette loi est générale. Pour cela, nous démontrerons que, si elle est vraie pour u_n, elle l'est aussi pour u_{n+1}, c'est-à-dire que si l'expression de u_n a mêmes coefficients que la n^e puissance du binôme, l'expression de u_{n+1} aura mêmes coefficients que la $n+1^e$ puissance. Soit donc (n° 36)

$$u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 \ldots\ldots + C_n^{p-1} \Delta^{p-1} u_0 + C_n^p \Delta^p u_0 \ldots\ldots + \Delta^n u_0.$$

Si l'on imagine la première colonne verticale supprimée, ce qui revient, comme nous l'avons dit, à augmenter d'une unité l'indice de la lettre Δ dans chaque terme, cette relation devient

$$\Delta u_n = \Delta u_0 + C_n^1 \Delta^2 u_0 \ldots\ldots + C_n^{p-1} \Delta^p u_0 \ldots\ldots + \Delta^{n+1} u_0.$$

En substituant ces valeurs de u_n et de Δu_n dans la relation $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$, on a

$$u_{n+1} = u_0 + \left.\begin{matrix} C_n^1 \\ +1 \end{matrix}\right| \Delta u_0 + \left.\begin{matrix} C_n^2 \\ +C_n^1 \end{matrix}\right| \Delta^2 u_0 \ldots\ldots + \left.\begin{matrix} C_n^p \\ +C_n^{p-1} \end{matrix}\right| \Delta^p u_0 \ldots\ldots + \Delta^{n+1} u_0.$$

Mais on sait que $C_n^1 + 1 = C_{n+1}^1$, $C_n^2 + C_n^1 = C_{n+1}^2$, ..., et que, en général, $C_n^p + C_n^{p-1} = C_{n+1}^p$; la relation précédente se réduit donc à

$$u_{n+1} = u_0 + C_{n+1}^1 \Delta u_0 + C_{n+1}^2 \Delta^2 u_0 \ldots\ldots C_{n+1}^p \Delta^p u_0 \ldots\ldots + \Delta^{n+1} u_0.$$

On voit que, si la loi est vraie pour u_n, elle l'est aussi pour u_{n+1}. Comme elle est démontrée pour u_2, u_3, u_4, elle l'est pour u_5, u_6, ..., et par conséquent pour un terme quelconque.

Ainsi nous avons la formule générale

$$(\alpha) \qquad u_n = u_0 + \frac{n}{1} \Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0.$$

Au moyen de cette formule, on obtient chacun des nombres u_0, u_1, u_2, ..., u_m, en donnant à n l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, ... m. On peut écrire cette formule sous la forme symbolique

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0,$$

en convenant de développer $(1 + \Delta)^n$ suivant la loi du binôme, comme si la lettre Δ désignait une quantité, et de regarder ensuite les exposants comme des indices.

On donne, par exemple, le nombre u_0 et ses cinq différences successives

$$u_0 = 1,\ \Delta u_0 = 9,\ \Delta^2 u_0 = 6,\ \Delta^3 u_0 = -2,\ \Delta^4 u_0 = 5,\ \Delta^5 u_0 = -13.$$

Si dans la formule (α) on fait $n = 4$, on a

$$u_4 = 1 + 4.9 + 6.6 - 4.2 + 5 = 70.$$

On obtient ainsi directement le nombre 70 que l'on a trouvé précédemment par un calcul de proche en proche.

202. Nous avons vu aussi (n° 199) que, lorsqu'on donne les $m + 1$ nombres

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ldots u_m,$$

on peut, par un calcul de proche en proche, trouver les m différences successives du premier de ces nombres, savoir,

$$\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0, \ldots\ldots \Delta^m u_0.$$

Cherchons de même une formule algébrique donnant l'expression de l'une quelconque de ces différences en fonction des nombres donnés.

On a d'abord

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0.$$

On a aussi par définition

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0.$$

Mais $\Delta u_1 = u_2 - u_1$; si dans l'expression de $\Delta^2 u_0$ on remplace Δu_0 et Δu_1 par leurs valeurs, il vient

$$\Delta^2 u_0 = (u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = u_2 - 2u_1 + u_0.$$

On a de même

$$\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0.$$

Nous connaissons $\Delta^2 u_0$; il est facile d'en déduire $\Delta^2 u_1$. Imaginons que dans le tableau des différences on supprime la première ligne horizontale, la seconde ligne deviendra la première, la troisième la seconde, etc.; c'est comme si l'on mettait u_1 à la place de u_0, u_2 à la place de u_1, etc.; en un mot, c'est comme si l'on augmentait d'une unité l'indice de la lettre u dans chaque terme. Il est clair que le tableau ainsi modifié jouira des mêmes propriétés que le tableau primitif. Nous avons trouvé la relation

$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0;$$

nous aurons maintenant

$$\Delta^2 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1.$$

Si dans la relation $\Delta^3 u_0 = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_0$ on remplace $\Delta^2 u_0$ et $\Delta^2 u_1$ par leurs valeurs, il vient

$$\begin{aligned} \Delta^3 u_0 = u_3 - 2u_2 + u_1 & \\ - u_2 + 2u_1 - u_0 & \end{aligned} = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0.$$

Le même raisonnement peut être répété indéfiniment. On a

$$\Delta^4 u_0 = \Delta^3 u_1 - \Delta^3 u_0.$$

Nous connaissons $\Delta^3 u_0$. Si l'on imagine encore la première ligne horizontale supprimée, ce qui revient à augmenter d'une unité l'indice de la lettre u dans chaque terme, la relation

$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$$

devient

$$\Delta^3 u_1 = u_4 - 3u_3 + 3u_2 - u_1.$$

En remplaçant $\Delta^3 u_0$ et $\Delta^3 u_1$ par leurs valeurs, on a

$$\begin{array}{ll}\Delta^4 u_0 = u_4 - 3u_3 + 3u_2 - u_1 & = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0. \\ \qquad - u_3 + 3u_2 - 3u_1 + u_0 & \end{array}$$

On reconnaît encore les coefficients du développement de la puissance du binôme. L'expression de $\Delta^2 u_0$ a pour coefficients ceux de $(a-b)^2$, l'expression de $\Delta^3 u_0$ ceux de $(a-b)^3$, l'expression de $\Delta^4 u_0$ ceux de $(a-b)^4$. Démontrons que la loi est générale : admettons-la pour $\Delta^n u_0$ et soit

$$\Delta^n u_0 = u_n - C_n^1 u_{n-1} \ldots\ldots \mp C_n^{p-1} u_{n-p+1} \pm C_n^p u_{n-p} \ldots\ldots \pm u_0.$$

Si l'on imagine la première ligne horizontale supprimée, ce qui revient, comme nous l'avons dit, à augmenter d'une unité tous les indices de la lettre u, cette relation devient

$$\Delta^n u_1 = u_{n+1} - C_n^1 u_n \ldots\ldots \pm C_n^p u_{n-p+1} \ldots\ldots \pm u_1.$$

Dans la relation $\Delta^{n+1} u_0 = \Delta^n u_1 - \Delta^n u_0$ remplaçons $\Delta^n u_0$ et $\Delta^n u_1$ par leurs valeurs, nous aurons

$$\Delta^{n+1} u_0 = u_{n+1} \begin{array}{c|c|c|l} - C_n^1 & u_n + C_n^2 & u_{n-1} \ldots\ldots \pm C_n^p & u_{n+1-p} \ldots\ldots \mp u_0, \\ - 1 & + C_n^1 & \pm C_n^{p-1} & \end{array}$$

ou, en simplifiant,

$$\Delta^{n+1} u_0 = u_{n+1} - C_{n+1}^1 u_n + C_{n+1}^2 u^{n-1} \ldots\ldots \pm C_{n+1}^p u_{n+1-p} \ldots\ldots \pm u_0.$$

On voit par là que, si la loi est vraie pour $\Delta^n u_0$, elle l'est aussi pour $\Delta^{n+1} u_0$. Comme elle a été démontrée pour $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, $\Delta^4 u_0$, elle est vraie pour $\Delta^5 u_0$, $\Delta^6 u_0$, ..., et par conséquent pour une différence d'ordre quelconque.

On a donc la formule générale

$$(\beta) \qquad \Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} \ldots\ldots \pm u_0.$$

Au moyen de cette formule on obtiendra chacune des m différences successives de u_0, en donnant à n l'une quelconque des valeurs 1, 2, ... m. On peut écrire cette formule sous la forme symbolique $\Delta^n u_0 = (u - 1)^n$, en remplaçant dans le développement les exposants par des indices et le dernier terme 1 ou u^0 par u_0.

On donne, par exemple, les six nombres 1, 10, 25, 44, 70 et 98. Si l'on fait $n = 4$ dans la formule (β), on aura directement la différence

$$\Delta^4 u_0 = 70 - 4.44 + 6.25 - 4.10 + 1 = 5,$$

obtenue précédemment par une valeur de proche en proche.

Différences d'une fonction.

203. Soit $u = f(x)$ une fonction quelconque de la variable x; si l'on donne à la variable $m + 1$ valeurs

$$x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots\ldots x_m,$$

la fonction prendra une suite de valeurs correspondantes

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots\ldots u_m,$$

dont nous pourrons prendre les différences des divers ordres, comme nous l'avons expliqué précédemment. Ordinairement les valeurs données à la variable forment une progression arithmétique dont on appelle h la raison. Supposons que x représente l'un quelconque des termes de la progression, $x + h$ étant le terme suivant; les valeurs correspondantes $f(x)$ et $f(x + h)$ de la fonction auront pour différence première $f(x + h) - f(x)$; c'est une nouvelle fonction de x que l'on nomme *différence première* de la fonction proposée et que l'on désigne par $\Delta f(x)$. Si dans cette

fonction $\Delta f(x)$ on remplace successivement x par chacun des termes de la progression, on obtiendra les m différences premières que fournissent les $m+1$ valeurs de la fonction.

De même, si l'on donne à x deux valeurs consécutives x et $x+h$, les valeurs correspondantes de la fonction $\Delta f(x)$ auront une différence $\Delta f(x+h) - \Delta f(x)$; c'est une nouvelle fonction de x que l'on nomme *différence seconde* de la fonction proposée et que l'on désigne par $\Delta^2 f(x)$. Et ainsi de suite.

Prenons comme exemple la fonction

$$u = a^x;$$

nous aurons

$$\Delta u = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1).$$

Ainsi on forme la différence première de la fonction a^x en multipliant cette fonction par la quantité constante $a^h - 1$.

On aura de même

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= a^x(a^h - 1)^2, \\ \Delta^3 u &= ax(a^h - 1)^3, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \Delta^n u &= a^x(a^h - 1)^n. \end{aligned}$$

Considérons encore la fonction

$$u = x(x+h)(x+2h)\dots\dots[x+(n-1)h];$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \Delta u = &(x+h)(x+2h)\dots\dots(x+nh) \\ &- x(x+h)\dots\dots[x+(n-1)h] \\ = &nh(x+h)(x+2h)\dots\dots[x+(n-1)h]. \end{aligned}$$

La fonction proposée est du degré n; pour former la dif-

férence Δu, on a multiplié par le nombre des facteurs et par la raison h et l'on a supprimé le premier facteur.

En appliquant la même règle, on écrira de suite

$$\Delta^2 u = n(n-1)\, h^2 (x+2h)(x+3h) \ldots\ldots [x+(n-1)h],$$

. . . .

. . . .

$$\Delta^n u = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3.2.1 h^n.$$

On trouve de la même manière

$$\Delta \sin x = 2 \sin\frac{h}{2} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta \cos x = -2 \sin\frac{h}{2} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

et par suite

$$\Delta^2 \sin x = -2^2 \sin^2\frac{h}{2} \sin(x+h),$$

$$\Delta^2 \cos x = -2^2 \sin^2\frac{h}{2} \cos(x+h),$$

$$\Delta^3 \sin x = -2^3 \sin^3\frac{h}{2} \cos\left(x+3\frac{h}{2}\right),$$

$$\Delta^3 \cos x = 2^3 \sin^3\frac{h}{2} \sin\left(x+3\frac{h}{2}\right);$$

$$\Delta^4 \sin x = 2^4 \sin^4\frac{h}{2} \sin(x+2h),$$

$$\Delta^4 \cos x = 2^4 \sin^4\frac{h}{2} \cos(x+2h).$$

Différences d'une fonction entière.

204. Considérons en particulier la fonction entière du degré m. On a, en développant d'après la loi connue,

$$\Delta u = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

ou

$$\Delta u = h\left[f'(x) + f''(x)\frac{h}{1.2} + f'''(x)\frac{h^2}{1.2.3} + \ldots\ldots\right].$$

On voit que la différence première est un polynôme entier en x du degré $m-1$, et qu'elle contient en facteur la raison h de la progression arithmétique. Si l'on représente cette différence première par $hf_1(x)$, on a de même

$$\Delta^2 u = h[f_1(x+h) - f_1(x)] = h\left[f_1'(x)h + f_1''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots.\right],$$

$$\Delta^2 u = h^2\left[f_1'(x) + f_1''(x)\frac{h}{1.2} + \ldots..\right].$$

La différence seconde du polynôme proposé est un polynôme entier en x du degré $m-2$, et contient h^2 en facteur. Si on représente cette différence par $h^2f_2(x)$, on a de même

$$\Delta^3 u = h^2[f_2(x+h) - f_2(x)] = h^2\left[f_2'(x)h + f_2''(x)\frac{h^2}{1.2} + \ldots\right],$$

$$\Delta^3 u = h^3\left[f_2'(x) + f_2''(x)\frac{h}{1.2} + \ldots..\right].$$

La différence troisième est du degré $m-3$ par rapport à x et contient h^3 en facteur, et ainsi de suite. En général la différence d'ordre n est du degré $m-n$ par rapport à x et contient h^n en facteur. Enfin la différence d'ordre m sera du degré zéro par rapport à x; ce sera donc une constante, et par conséquent les différences d'un ordre plus élevé seront nulles. Ainsi *une fonction entière du degré* m *admet* m *différences successives*.

Soit

$$u = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m$$

la fonction entière proposée, ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x. Cette fonction étant la somme des termes qui la composent, sa différence d'un ordre quelconque est égale à la somme des différences du même ordre de ses différents termes. Il en résulte que la différence première ne dépendra pas du terme constant A_m, puisque la différence de ce terme est nulle ; la différence seconde ne dépendra pas des deux derniers termes $A_{m-1}x + A_m$, puisque la différence seconde de cette partie est nulle ; en général, la différence d'ordre n ne dépendra que des termes dont le degré est égal ou supérieur à n; enfin la différence d'ordre m ne dépendra que du premier terme A_0x^m. Nous nous proposons de calculer cette différence d'ordre m.

Dans le polynôme $f_1(x)$, la partie du degré le plus élevé est $f'(x)$; son premier terme est mA_0x^{m-1}. Dans le polynôme $f_2(x)$, la partie du degré le plus élevé est $f_1'(x)$; le premier terme de $f_1(x)$ étant mA_0x^{m-1}, le premier terme de $f_1'(x)$ ou de $f_2(x)$ est $m(m-1)A_0x^{m-2}$. De même le premier terme de $f_2'(x)$ ou de $f_3(x)$ est $m(m-1)(m-2)A_0x^{m-3}$, et ainsi de suite. En continuant la même loi, on a enfin

$$f_m(x) = m(m-1) \ldots\ldots 3.2.1\, A_0,$$

et par suite

$$\Delta^m u = 1.2.3 \ldots\ldots m A_0 h^m.$$

Nous avons dit que les différences successives Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ..., $\Delta^m u$ contiennent en facteurs h, h^2, h^3, ..., h^m. Il en résulte que lorsque la raison h de la progression arithmétique est très-petite, les différences de la fonction sont elles-mêmes très-petites. Les différences premières sont des quantités petites du premier ordre ; les différences secondes des quantités petites du second ordre, etc.

Exemples.

1° Former les carrés des nombres entiers. Considérons la fonction $u = x^2$, et supposons que l'on donne à x les valeurs 0, 1, 2, 3,......, en progression arithmétique. La fonction étant du second degré, la différence seconde $\Delta^2 u$ est constante et égale à $1.2.h^2$, c'est-à-dire à 2, puisque la raison h est l'unité; les différences d'un ordre plus élevé sont nulles. Pour commencer le tableau, il suffit d'écrire les deux premiers carrés 0 et 1 avec leur différence première 1 et la différence seconde 2 trouvée directement.

	Δ	Δ^2
0	1	2
1	3	2
4	5	2
9	7	2
16	9	
25		

On répétera la différence seconde constante 2 dans la troisième colonne autant que l'on voudra, et l'on dira, en calculant par lignes obliques, d'après la règle établie au n° 200 : 2 et 1...3 et 1...4; 2 et 3...5 et 4...9; 2 et 5...7 et 9...16; en continuant de cette manière on formera les carrés des nombres entiers consécutifs.

2° Former les cubes des nombres entiers. Considérons la fonction $u = x^3$ et donnons encore à x les valeurs successives 0, 1, 2, 3... en progression arithmétique. La fonction étant du troisième degré, la différence troisième sera con-

stante et égale à $1.2.3h^3$ ou 6. Pour commencer le tableau nous écrirons les trois premiers cubes 0, 1, 8, d'où nous déduirons les différences premières 1 et 7, et la différence seconde 6; mettant ensuite à la droite la différence troisième constante 6 trouvée directement, on pourra effectuer le calcul des lignes obliques et obtenir les cubes des nombres entiers consécutifs.

	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1	6	6
1	7	12	6
8	19	18	6
27	37	24	
64	61		
125			

3° Trouver la somme des carrés des n premiers nombres. Considérons la suite des quantités

$$u_0=0^2,\ u_1=0^2+1^2,\ u_2=0^2+1^2+2^2,\ u_3=0^2+1^2+2^2+3^2,\ldots;$$

les différences premières sont les carrés consécutifs 1^2, 2^2, 3^2, ... ; il résulte de ce qui a été dit précédemment que les différences secondes des différences premières, ou les différences troisièmes des nombres proposés, sont constantes et égales à 2 ; et par suite que les différences d'un ordre plus élevé sont nulles. Écrivons le commencement du tableau avec les trois premiers nombres u_0, u_1, u_2;

$u_0 = 0^2$	$\Delta u_0 = 1$	$\Delta^2 u_0 = 3$	$\Delta^3 u_0 = 2.$
$u_1 = 0^2 + 1^2$	$\Delta u_1 = 4$		
$u_2 = 0^2 + 1^2 + 2^2$			

Servons-nous maintenant de la formule (α) démontrée

au n° 201, formule qui exprime un terme quelconque u_n de la suite des nombres proposés au moyen du premier d'entre eux et de ses différences successives; ici les différences d'un ordre supérieur au troisième sont nulles; le développement se réduira donc à ses quatre premiers termes, et l'on aura

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.3}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.5}\Delta^3 u_0,$$

et, en remplaçant les différences par leurs valeurs,

$$u_n = n + \frac{3n(n-1)}{1.2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4° Trouver la somme des cubes des n premiers nombres. Considérons la suite des quantités $u^0 = 0^3$, $u_1 = 0^3 + 1^3$, $u_2 = 0^3 + 1^3 + 2^3$, $u_3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3$, ...; les différences premières sont les cubes consécutifs 1^3, 2^3, 3^3, ..., les différences troisièmes de ces différences premières, ou les différences quatrièmes des quantités proposées, sont constantes et égales à 6; les différences d'un ordre plus élevé sont nulles. On écrira le commencement du tableau avec les quatre premiers nombres

$u_0 = 0^3$	$\Delta u_0 = 1$	$\Delta^2 u_0 = 7$	$\Delta^3 u_0 = 12$	$\Delta^4 u_0 = 6.$
$u_1 = 0^3 + 1^3$	$\Delta u_0 = 8$	$\Delta^2 u_1 = 19$		
$u_2 = 0^3 + 1^3 + 2^3$	$\Delta u_2 = 27$			
$u^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3$				

Les différences d'un ordre supérieur au quatrième étant nulles, la formule se réduit à ses cinq premiers termes, et l'on a

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0,$$

et, en remplaçant les différences par leurs valeurs,

$$n_n = n + \frac{7n(n-1)}{2} + 2n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

On retrouve ainsi les formules déjà obtenues par d'autres moyens (nos 41 et 47). Cette méthode permet de trouver avec la même facilité la somme des puissances quatrièmes, ou des puissances cinquièmes,....., des nombres entiers consécutifs.

Calcul des valeurs d'une fonction entière quand on donne à la variable des valeurs en progression arithmétique.

205. Considérons d'abord un polynôme du troisième degré

$$u = x^3 + 3x^2 - 17x + 5.$$

Nous nous proposons de calculer les valeurs que prend ce polynôme pour les valeurs entières

$$\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 2, 3, \ldots\ldots$$

positives ou négatives, données à la variable x. En substituant directement les trois nombres simples -1, 0, $+1$, on obtient les trois résultats 24, 5, et -8. Avec ces trois valeurs, on forme deux différences premières -19 et -13, et une différence seconde 6. La fonction étant entière et du troisième degré, on sait que la différence troisième est constante et égale à $1.2.3.A_0h^3$, c'est-à-dire à 6 dans l'exemple actuel; les différences d'ordre supérieur sont nulles. On peut donc prolonger le tableau indéfiniment par lignes obliques d'après la règle du n° 200, et obtenir les

valeurs du polynôme pour $x=2$, $x=3$, etc. Voici la disposition du tableau :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
-1	24	-19	6	6
0	5	-13	12	6
$+1$	-8	-1	18	6
2	-9	17	24	6
3	8	41	30	
4	49	71		
5	120			

La première colonne verticale contient les valeurs de la variable x, la seconde les valeurs correspondantes de la fonction, et les suivantes les différences, comme à l'ordinaire. La dernière colonne contient la différence troisième constante 6 que l'on répète indéfiniment. On calcule en disant : 6 et 6..... 12 et -13..... -1 et -8..... -9, valeur de la fonction pour $x=2$. Recommençant alors une nouvelle ligne oblique, on dit : 6 et 12..... 18 et -1.....17 et -9..... 8, valeur du polynôme pour $x=3$, etc.

On peut aussi prolonger le tableau vers le haut et trouver les valeurs de la fonction pour $x=-2$, $x=-3$, etc. On remarque, en effet, que *tout nombre du tableau est égal au nombre placé au-dessous de lui, moins celui qui est à droite du premier;* car, de la relation générale

$$\Delta^{p+1}u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^p u_n,$$

on déduit

$$\Delta^p u_n = \Delta^p u_{n+1} - \Delta^{p+1} u_n;$$

le nombre $\Delta^p u_n$ égale le nombre $\Delta^p u_{n+1}$ placé au-dessous de lui, moins le nombre $\Delta^{p+1} u_n$ qui est à sa droite.

On procédera donc de la manière suivante :

— 7	—72	71	—30	6
— 6	— 1	41	—24	6
— 5	40	17	—18	6
— 4	57	— 1	—12	6
— 3	56	—13	— 6	6
— 2	43	—19	0	6
— 1	24	—19	6	6
x	u	Δ	Δ^2	Δ^3

La ligne horizontale inférieure contient la valeur de la fonction et ses différences successives pour $x = -1$, valeurs trouvées précédemment, et l'on a répété la différence troisième constante 6. Si de la différence seconde 6 on retranche la différence troisième 6, on a la différence seconde 0 qui correspond à $x = -2$; si de la différence première -19 on retranche la différence seconde 0, on a la différence première -19 qui correspond à $x = -2$; enfin, si du nombre 24 on retranche cette différence première -19, on obtient la valeur 43 du polynôme pour $x = -2$. On a formé de la sorte la seconde ligne horizontale au moyen de la première. De la seconde on déduira de même la troisième ; on dira : 0 moins 6 donne -6; -19 moins -6..... -13 ; 43 moins -13..... 56 ; telle est la valeur du polynôme pour $x = -3$. Continuons encore : -6 moins 6..... -12; -13 moins -12..... -1; 56 moins -1..... 57, valeur du polynôme pour $x = -4$, et ainsi de suite. Le calcul se fait ici par lignes horizontales successives. Ordinairement ces deux tableaux sont réunis quand la place le permet, et constituent un seul et même tableau que l'on

peut prolonger à volonté vers le bas par additions successives, vers le haut par soustractions.

206. Soit maintenant un polynôme du quatrième degré

$$u = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3.$$

On subsistuera directement à la place de x les quatre nombres $-1, 0, 1, 2$, ce qui donne les quatre valeurs correspondantes $-13, 3, 7-19$, avec lesquelles on forme trois différences premières $16, 4, -26$, deux différences secondes $-12, -30$, et une différence troisième -18; on connaît d'ailleurs la différence quatrième, qui est constante et égale à $1.2.3.4.A_0h^4$ ou 24, puisque la fonction est du quatrième degré; les différences suivantes sont nulles. On a ainsi tout ce qu'il faut pour pouvoir effectuer le calcul et le prolonger dans un sens ou dans l'autre.

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
-3	111	-110	96	-66	24
-2	$+1$	-14	30	-42	24
-1	-13	16	-12	-18	24
0	3	4	-30	6	24
1	7	-26	-24	30	24
2	-19	-50	6	54	24
3	-69	-44	60	78	
4	-113	16	138		
5	-97	154			
6	57				

207. Considérons, en général, une fonction entière $u = f(x)$ du degré m; supposons que l'on donne à la va-

riable m valeurs en progression arithmétique

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots\ldots,\ x_0+(m-1)h,$$

et que l'on connaisse les m valeurs correspondantes

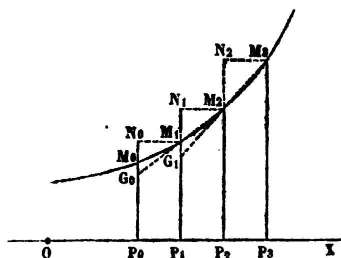
$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_{m-1}$$

de la fonction. Avec ces m valeurs, on formera $m-1$ différences premières, $m-2$ différences secondes, ..., et enfin une différence de l'ordre $m-1$. La fonction étant entière et du degré m, on sait que la différence d'ordre m est constante et égale à $1.2\ldots\ldots mA_0h^m$, et que les différences suivantes sont nulles. On a ainsi tout ce qu'il faut pour calculer le tableau des différences; si l'on effectue le calcul par lignes obliques en descendant, on obtiendra les valeurs de la fonction qui correspondent aux termes suivants $x_0+mh, x_0+(m+1)h, \ldots$, de la progression arithmétique; si, au contraire, on remonte par lignes horizontales, on trouvera les valeurs qui correspondent aux termes précédents x_0-h, x_0-2h, ... En résumé, le calcul de m valeurs par substitution directe suffit pour que l'on puisse trouver toutes les autres.

Il est à remarquer que la substitution directe d'un nombre a à la place de x s'effectue assez simplement d'après le procédé du n° 162. On opérera sans rien écrire comme si l'on voulait diviser le polynôme par $x-a$: le reste est le résultat cherché.

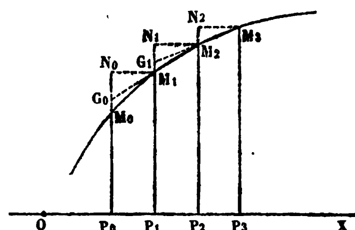
Signification géométrique des différences du premier et du second ordre.

208. Supposons que l'on porte sur la ligne horizontale OX, à partir du point fixe O, des longueurs OP_0, OP_1, OP_2, ..., égales aux valeurs x_0, x_1, x_2,....., que l'on donne



à la variable x et que l'on élève des perpendiculaires ou ordonnées P_0M_0, P_1M_1, P_2M_2,... égales aux valeurs correspondantes u_0, u_1, u_2... de la fonction. Si par les points M_1, M_2,..... on mène des horizontales M_1N_0, M_2N_1,..., jusqu'à la rencontre des ordonnées précédentes, on voit que les différences premières Δu_0, Δu_1,..... seront représentées par les longueurs M_0N_0, M_1N_1,..... affectées du signe + ou du signe —, suivant que les ordonnées vont en augmentant ou en diminuant.

Dans le cas où les valeurs de x sont en progression arithmétique, par les deux points M_2, M_1, faisons passer une droite jusqu'à la rencontre de la première ordonnée en G_0; par les deux points M_3, M_2, une droite jusqu'à la rencontre de la seconde ordonnée en G_1, et ainsi de suite; les longueurs M_0G_0, M_1G_1, prises avec le signe + ou le signe —, représenteront les différences secondes $\Delta^2 u_0$, $\Delta^2 u_1$,... En effet, les triangles $M_1N_0G_0$, $M_2N_1M_1$ sont égaux, et l'on a $N_0G_0 = M_1N_1 = \Delta u_1$; donc $M_0G_0 = N_0G_0 - M_0N_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0$, etc. Lorsque la différence seconde est positive, le point G_0 est au-dessous de M_0 et la courbe tourne sa concavité vers le haut; c'est ce qui a lieu dans la première figure. Lorsque la différence seconde est négative, le point G_0 est au-dessus de M_0, et la courbe tourne sa concavité vers le bas; c'est le cas de la seconde figure.



CHAPITRE II.

Interpolation.

209. Supposons que l'on ait trouvé par un moyen quelconque les $m+1$ valeurs

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m$$

que prend une fonction lorsqu'on donne à la variable $m+1$ valeurs

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m.$$

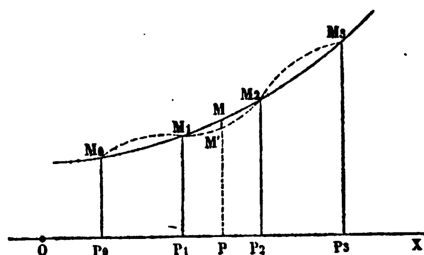
Interpoler, c'est trouver les valeurs de la fonction pour les valeurs intermédiaires de la variable.

Par exemple, on a calculé les logarithmes des nombres entiers de 10000 à 100000. Interpoler, c'est trouver le logarithme d'un nombre fractionnaire compris dans l'un des intervalles.

Autre exemple : par des expériences directes, on a mesuré la tension maximum de la vapeur d'eau pour des températures de 10 en 10 degrés, depuis 100 jusqu'à 200 degrés. Interpoler, c'est trouver la tension de la vapeur pour une température intermédiaire.

Le problème de l'interpolation n'est pas déterminé, parce qu'on ne connaît pas en général la nature de la fonction, mais seulement certaines valeurs particulières, et qu'il est imposible d'en déduire rigoureusement les autres valeurs; on conçoit, en effet, qu'il existe une infinité de fonctions qui prennent des valeurs données pour $m+1$ valeurs de la variable, sans qu'elles se confondent pour cela dans les intervalles. Afin de bien mettre ceci en évidence, imagi-

nons que l'on représente les valeurs données de la fonction



par des ordonnées, et supposons que l'on trace une courbe passant par les $m+1$ points M_0, M_1, M_2,...., ainsi obtenus; l'ordonnée de cette courbe représentera une certaine fonction $u=f(x)$ admettant les $m+1$ valeurs données; si maintenant l'on donne à x une valeur intermédiaire OP quelconque et que l'on mesure la longueur de l'ordonnée correspondante MP, on aura la valeur cherchée de la fonction; la courbe tracée résout donc le problème de l'interpolation. Mais il est évident que par les $m+1$ points donnés, on peut faire passer une infinité de courbes. Ces diverses courbes donneront pour la même valeur OP de x des valeurs différentes MP, M'P. Ainsi il y a indétermination. Si l'on emploie une courbe pour effectuer l'interpolation, ce qui est un moyen très-commode dans la pratique, on aura soin de la tracer aussi unie que possible, en évitant les sinuosités inutiles.

En algèbre, on effectue l'interpolation en cherchant une fonction entière du degré m qui admette les $m+1$ valeurs données. Alors la question est complétement déterminée; nous démontrerons, en effet, qu'il existe toujours une fonction entière du degré m jouissant de ces propriétés, et qu'il n'en existe qu'une. Une fois cette fonction trouvée, on pourra calculer les valeurs qu'elle prend pour des va-

leurs intermédiaires quelconques de x; mais ces valeurs calculées ne doivent être considérées que comme des valeurs approchées de la fonction inconnue. On conçoit que les erreurs commises seront d'autant plus petites que le nombre des valeurs données sera plus grand et surtout que les intervalles seront plus petits.

Formule de Lagrange.

210. La question que nous avons à résoudre est la suivante : trouver une fonction entière du degré m qui admette $m+1$ valeurs données

$$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m$$

pour $m+1$ valeurs données

$$x_0, x_1, x_2, x_m$$

de la variable x.

Proposons-nous d'abord de déterminer une fonction entière du degré m qui prenne la valeur u_0 pour $x=x_0$, et s'annule pour les m valeurs $x_1, x_2, \ldots\ldots x_m$ de la variable x. Ce polynôme entier du degré m, que nous désignerons par X_0, devant admettre les m racines $x_1, x_2, \ldots\ldots x_m$, sera de la forme

$$X_0 = A_0(x-x_1)(x-x_2) \ldots\ldots (x-x_m).$$

On déterminera la constante A_0 par la condition que le polynôme prenne la valeur u_0 pour $x=x_0$, ce qui donne la relation

$$u_0 = A_0(x_0-x_1)(x_0-x_2) \ldots\ldots (x_0-x_m);$$

d'où

$$A_0 = \frac{u_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \ldots\ldots (x_0-x_m)};$$

on aura donc

$$X_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\,\ldots\ldots\,(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\,\ldots\ldots\,(x_0-x_m)}\,u_0.$$

Proposons de même de déterminer une fonction entière du degré m prenant la valeur u_1 pour $x=x_1$ et s'annulant pour les m valeurs $x_0, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m$ de la variable x. Ce polynôme, que nous désignerons par X_1, devant admettre les m racines $x_0, x_2, x_3, \ldots\ldots x_m$, sera de la forme

$$X_1 = A_1(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\,\ldots\ldots\,(x-x_m),$$

et l'on déterminera la constante A_1 par la condition que le polynôme prenne la valeur u_1 pour $x=x_1$, ce qui donne la relation

$$u_1 = A_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\,\ldots\ldots\,(x_1-x_m),$$

d'où

$$A_1 = \frac{u_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\,\ldots\ldots\,(x_1-x_m)},$$

et par suite

$$X_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\,\ldots\ldots\,(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\,\ldots\ldots\,(x_1-x_m)}\,u_1.$$

Nous formerons, suivant la même loi, une fonction entière X_2 du degré m qui prenne la valeur u_2 pour $x=x_2$ et s'annule pour les m autres valeurs $x_0, x_1, x_3, \ldots\ldots x_m$ de la variable x, etc.; enfin une fonction entière X_m du degré m prenant la valeur u_m pour $u=x_m$ et s'annulant pour les m autres valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_{m-1}$ de la variable x.

Revenons maintenant à la question proposée. Il s'agit de trouver une fonction entière du degré m qui admette les $m+1$ valeurs données

$$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots u_m,$$

pour les $m+1$ valeurs

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_m,$$

de la variable x. Il est clair que la fonction

$$u = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_m,$$

somme des $m+1$ fonctions précédentes, jouit des propriétés énoncées; car si l'on fait $x=x_0$, la fonction X_0 prenant la valeur u_0 et chacune des autres X_1, X_2,..... X_m s'annulant, on aura $u=u_0$. De même si l'on fait $x=x_1$, la fonction X_1 prenant la valeur u_1 et chacune des autres X_0, X_2, ...X_m s'annulant, on a $u=u_1$; et ainsi de suite. Enfin, si l'on fait $x=x_m$, la fonction X_m prenant la valeur u_m et chacune des autres s'annulant, on aura $u=u_m$.

Ainsi la fonction cherchée u est donnée par la formule suivante, trouvée par Lagrange,

$$\text{(A)}\quad u = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ \ldots\ (x_0-x_m)}u_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ \ldots\ (x_1-x_m)}u_1 + \ldots$$

211. Nous avons trouvé une fonction entière du degré m jouissant des propriétés énoncées. On démontre aisément qu'il n'en existe qu'une, c'est-à-dire que si deux polynômes entiers du degré m sont égaux pour $m+1$ valeurs de x, ils sont identiques. Soient en effet,

$$Ax^m + Bx^{m-1}\ \ldots + H,$$
$$A'x^m + B'x^{m-1}\ \ldots + H',$$

ces deux polynômes; en les retranchant l'un de l'autre, on aurait une équation du degré m

$$(A-A')x^m + (B-B')x^{m-1} + \ldots + (H-H') = 0,$$

ayant $m+1$ racines, ce qui est impossible. Il faut donc que les coefficients soient respectivement égaux, et alors les deux polynômes sont identiques.

Formule de Newton.

212. La formule de Lagrange est générale ; elle est vraie quelles que soient les $m+1$ valeurs données à la variable ; celle de Newton se rapporte spécialement au cas où ces valeurs sont en progression arithmétique.

Soient

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots..\ x_0+nh,\ \ldots..\ x_0+mh$$

les $m+1$ valeurs données à la variable x;

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots..\ u_n,\ \ldots..,\ u_m$$

les valeurs correspondantes de la fonction u. Avec ces $m+1$ valeurs on peut former les m différences successives

$$\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots..\ \Delta^m u_0.$$

Reprenons la formule (α) du n° 201

$$u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots. + \frac{n(n-1)\ldots.(n-n+1)}{1.2\ldots.n}\Delta^n u_0,$$

qui exprime un terme quelconque de la suite proposée au moyen du premier et de ses n différences successives. Le second membre s'arrête à $\Delta^n u_0$; mais on peut, sans inconvénient, le prolonger jusqu'à $\Delta^m u_0$ et l'écrire de la manière suivante

$$(1)\qquad u_n = x_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots..$$
$$\ldots.. + \frac{n(n-1)\ldots..(n-m+1)}{1.2\ldots..m}\Delta^m u_0;$$

car les termes ajoutés ainsi, contenant le facteur $n-n$, sont nuls. Appelons x un terme quelconque x_0+nh de la progression arithmétique, et u la valeur correspondante u_n de la fonction. Nous posons $x=x_0+nh$; il en résulte $n=\frac{x-x_0}{h}$. Si l'on remplace n par sa valeur dans l'équation (1), il vient

$$(B)\quad u=u_0+\frac{x-x_0}{h}\frac{\Delta u_0}{1}+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots\ldots m}.$$

On voit d'abord que le second membre de l'équation (B) est une fonction entière du degré m par rapport à x; car le second terme est du premier degré, le troisième du second, ...; le dernier, étant un produit de m facteurs du premier degré, est du degré m; ce terme du degré m, ne pouvant se réduire avec aucun autre, subsistera nécessairement dans le polynôme qui sera ainsi du degré m. On voit ensuite que cette fonction prend les $m+1$ valeurs données u_0, u_1, ... u_m pour les $m+1$ valeurs données de x; car si dans cette fonction on remplace x par un terme quelconque x_0+nh de la progression arithmétique, ou $\frac{x-x_0}{h}$ par n, elle devient évidemment égale au second membre de l'équation (1), c'est-à-dire à la quantité u_n.

Ainsi la formule (B) nous donne bien la fonction entière du degré m, qui, pour $m+1$ valeurs données de x en progression arithmétique, prend les $m+1$ valeurs données u_0, u_1, ... u_m. C'est la formule d'interpolation de Newton. Elle contient, non pas précisément les valeurs

données de la fonction, mais les différences successives qu'on en déduit, et ceci est un grand avantage, parce que, ces différences diminuant très-rapidement, on se bornera dans la pratique aux premiers termes, et on négligera tous les autres.

213. Afin de simplifier, posons $\frac{x-x_0}{h}=z$, la formule (B) devient

$$(C) \qquad u = u_0 + \frac{z}{1}\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots \\ \ldots + \frac{z(z-1)\ldots(z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m u_0.$$

Si l'on interpole dans le premier intervalle, c'est-à-dire de x_0 à x_0+h, z est une fraction moindre que l'unité.

Lorsque les différences d'un ordre supérieur au premier sont assez petites pour qu'on puisse les négliger, la formule se réduit à ses deux premiers termes

$$u = u_0 + z\Delta u_0.$$

L'accroissement $u-u_0$ de la fonction est proportionnel à l'accroissement z de la variable; on dit dans ce cas que l'on interpole par parties proportionnelles. C'est le mode très-simple d'interpolation que l'on emploie quand, au moyen des tables de logarithmes, on cherche les logarithmes des nombres fractionnaires. Réciproquement, si l'on veut trouver la valeur de la variable qui rend la fonction égale à une quantité donnée u, on a $z=\frac{u-u_0}{\Delta u_0}$.

Quand on conserve les deux premières différences, la

formule d'interpolation devient

$$u = u_0 + z\Delta u + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0.$$

Alors la question inverse se résout au moyen d'une équation du second degré, dont on calculera la racine comprise entre o et 1, l'autre racine étant en général très-grande à cause de la petitesse du coefficient de z^2 (1re partie, n° 160).

Exemples.

1° Trouver la fonction entière du troisième degré, qui admet les valeurs 5, —8, —9, 8, pour les quatre valeurs o, 1, 2, 3 de la variable. Le tableau des différences donne $u_0 = 5$, $\Delta u_0 = -13$, $\Delta^2 u_0 = 12$, $\Delta^3 u_0 = 6$; substituant dans la formule (B), on a la fonction cherchée

$$u = 5 - 13x + 6x(x-1) + x(x-1)(x-2),$$

ou, en ordonnant,

$$u = x^3 + 3x^2 - 17x + 5.$$

2° Trouver la fonction entière du quatrième degré qui admet les valeurs 1, —13, 3, 7, —19, pour les cinq valeurs — 2, — 1, o, 1, 2 de x. On formera les différences

$$u_0 = 1,\ \Delta u_0 = -14,\ \Delta^2 u_0 = 30,\ \Delta^3 u_0 = -42,\ \Delta^4 u_0 = 24,$$

que l'on substituera dans la formule (B), ce qui donne

$$u = 1 - 14(x+2) + 15(x+2)(x+1) - 7(x+2)(x+1)x \\ + (x+2)(x+1)x(x-1),$$

ou, en ordonnant,

$$u = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3.$$

3° La fonction $u = \log x$ a pour différences successives

$$\Delta u = \log(x+h) - \log x = \log\left(1+\frac{h}{x}\right) = \mathrm{M}\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2.x^2} + \frac{h^3}{3.x^3} - \ldots\right),$$

$$\Delta^2 u = \log(x+2h) - 2\log(x+h) + \log x = \log\left(1+\frac{2h}{x}\right) - 2\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= -\mathrm{M}\left(\frac{h^2}{x^2} - \frac{2h^3}{x^3} + \ldots\ldots\right),$$

$$\Delta^3 u = \log(x+3h) - 3\log(x+2h) + 3\log(x+h) - \log x$$

$$= \log\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \mathrm{M}\left(\frac{2h^3}{x^3} - \ldots\ldots\right).$$

Pour $h = 1$ et $x = 1000$, on a

$$\Delta u = \quad 0{,}00004\ 34270\ 76863,$$
$$\Delta^2 u = -\ 0{,}00000\ 00043\ 42076,$$
$$\Delta^3 u = \quad 0{,}00000\ 00000\ 00868.$$

On voit que les différences décroissent très-rapidement; la différence seconde étant moindre que l'unité du huitième ordre décimal, on peut la négliger lorsqu'on prend les logarithmes avec sept décimales, comme cela a lieu avec les tables de Callet, et interpoler par parties proportionnelles.

Limite des racines d'une équation algébrique.

214. Nous avons déjà indiqué (n° 185) une manière de trouver une limite supérieure des racines d'une équation algébrique. La méthode des différences fournit aussi une limite. Imaginons que la fonction entière $u = f(x)$ du degré m soit représentée par la formule (B)

$$u = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\frac{\Delta u_0}{1} + \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)\ldots\ldots\left(\frac{x-x_0}{h} - m + 1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots m},$$

comme nous venons de l'expliquer, et supposons que toutes les quantités

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^m u_0$$

soient positives, la raison h de la progression étant aussi positive. Si l'on donne à la variable x une valeur supérieure à $x_0 + (m-1)h$, tous les facteurs binômes que renferme le second membre deviendront positifs; car le dernier

$$\frac{x-x_0}{h} - (m-1),$$

qui est le plus petit d'entre eux, acquiert alors une valeur positive; la fonction étant une somme de termes positifs, a nécessairement une valeur positive. Il en est de même si l'on donne à x la valeur $x_0+(m-1)h$; car cette valeur, annulant le dernier facteur binôme et par conséquent le dernier terme, mais laissant positifs tous les autres, le polynôme sera encore une somme de termes positifs. Ainsi, x croissant indéfiniment à partir de $x_0+(m-1)h$, la fonction conservera toujours une valeur positive sans devenir nulle; donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de racine positive égale ou supérieure à la quantité $x_0+(m-1)h$. Cette quantité est une limite supérieure des racines positives de l'équation; on donne en général ce nom à toute quantité positive plus grande que la plus grande raison positive.

Dans l'exemple du n° 205, nous voyons que, pour $x=3$, le polynôme a une valeur positive 8 et que les différences correspondantes 41, 30, 6 sont aussi positives. En faisant $h=1$ et $x_0=3$ dans la formule $x_0+(m-1)h$, on en conclut que 5 est une limite supérieure des racines de l'équation

$$x^3+3x^2-17x+5=0.$$

De même, dans l'exemple du nº 206, nous voyons que pour $x=6$ le polynôme a une valeur positive 57, et que toutes les différences correspondantes sont aussi positives; car, pour les former, on n'aurait à additionner que des quantités positives. Le degré m étant ici égal à 4, on en conclut que $6+3$ ou 9 est une limite supérieure des racines de l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0.$$

Mais le groupement des termes fournit en général une limite moins élevée. Si l'on écrit les deux équations précédentes sous la forme

$$x(x^2 + 3x - 17) + 5 = 0,$$
$$x^2(x^2 - 5x - 7) + 15x + 3 = 0,$$

on reconnaît que 3 est une limite supérieure des racines de la première, 7 une limite supérieure des racines de la seconde.

215. Le tableau des différences donne aussi une limite inférieure des racines. Supposons que, pour la valeur x_0 attribuée à la variable x, la suite des quantités

$$u_0,\ \Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \ldots\ldots,\ \Delta^m u_0,$$

présente des signes alternés; je dis que x_0 est une limite inférieure des racines de l'équation. Car si l'on donne à x une valeur plus petite que x_0 en valeur relative, chacun des facteurs

$$\frac{x-x_0}{h},\ \frac{x-x_0}{h}-1,\ \ldots\ldots,\ \frac{x-x_0}{h}-m+1,$$

ayant une valeur négative, tous les termes de la formule (B)

ont le même signe ; donc le polynôme conserve toujours le même signe quand x varie de x_0 à $-\infty$, et par conséquent x_0 est une limite inférieure des racines. Dans les exemples précédents, -6 et -2 sont des limites inférieures.

CHAPITRE III.

CALCUL DES RACINES INCOMMENSURABLES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

Équation du troisième degré.

216. Nous avons indiqué (liv. VI, ch. 4) la manière de trouver les racines commensurables d'une équation algébrique. Occupons-nous maintenant du calcul des racines incommensurables. La première chose à faire est de séparer les racines, c'est-à-dire de former des intervalles comprenant les racines réelles de l'équation, de manière qu'il n'y ait qu'une racine dans chaque intervalle. Pour effectuer la séparation des racines, on substitue ordinairement des nombres équidistants, et quand il s'agit d'une équation algébrique, on abrége beaucoup les calculs par le moyen des différences.

Reprenons l'équation du troisième degré

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

La règle de Descartes montre que cette équation a une racine réelle négative, et zéro ou deux racines positives. En

substituant directement les trois nombres $-1, 0, +1$, et continuant le calcul par les différences, comme nous l'avons expliqué au n° 205, on obtient le tableau suivant :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
-6	-1	41	-24	6
-5	40	17	-18	6
-4	57	-1	-12	6
-3	56	-13	-6	6
-2	43	-19	0	6
-1	24	-19	6	6
0	5	-13	12	6
1	-8	-1	18	
2	-9	17		
3	8			

Le polynôme ayant des valeurs de signes contraires pour $x=0$ et $x=1$, on en conclut qu'une première racine réelle positive est comprise entre 0 et 1; la seconde racine positive est comprise entre 2 et 3; la racine négative entre -6 et -5. L'équation proposée a ses trois racines réelles, et ces racines sont séparées.

On a ainsi les racines à moins d'une unité près. Pour avoir l'une d'elles à un dixième près, on substituera des nombres équidistants d'un dixième dans l'intervalle qui la comprend. Par exemple, pour trouver la racine comprise entre 2 et 3, on substituera des nombres équidistants d'un dixième entre 2 à 3. On pourrait substituer directement trois nombres 2; 2,1; 2,2; puis continuer par les différences; mais on évite la substitution directe des deux nombres 2,1 et 2,2 qui entraînerait à des calculs assez longs, en

cherchant les différences successives qui se rapportent à $x = 2$ quand la racine de la progression arithmétique devient égale à $\frac{1}{10}$ et déduisant ces nouvelles différences des premières.

217. Voici une manière simple d'effectuer ce calcul pour le cas spécial du troisième degré.

Soit $f(x)$ un polynôme du troisième degré. On a, d'après ce qui a été dit au n° 204,

$$\Delta f(x) = h\left[f'(x) + f''(x)\frac{h}{1.2} + f'''(x)\frac{h^2}{1.2.3}\right] = hf_1(x),$$
$$\Delta^2 f(x) = h^2\left[f_1'(x) + f_1''(x)\frac{h}{1.2}\right] = h^2 f_2(x),$$
$$\Delta^3 f(x) = h^3 f_2'(x).$$

Le polynôme $f_1(x)$ est ici du second degré, et le polynôme $f_2(x)$ du premier degré. Si l'on remplace les dérivées de ces polynômes par leurs valeurs,

$$f_1'(x) = f''(x) + f'''(x)\frac{h}{1.2},$$
$$f_2'(x) = f_1''(x) = f'''(x),$$

il vient

$$\Delta f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3,$$
$$\Delta^2 f(x) = f''(x)h^2 + f'''(x)h^3,$$
$$\Delta^3 f(x) = f''(x)h^3.$$

La différence troisième est constante. La seconde expression peut être remplacée par une autre plus simple; car on a par définition

$$\Delta^3 f(x-h) = \Delta^2 f(x) - \Delta^2 f(x-h),$$

d'où l'on déduit

$$\Delta^2 f(x-h) = \Delta^2 f(x) - \Delta^3 f(x-h) = f''(x)h^2.$$

Il en résulte finalement les relations suivantes :

$$\Delta^3 f(x) = f'''(x)h^3,$$
$$\Delta^2 f(x-h) = f''(x)h^2,$$
$$\Delta f(x) = f'(x)h + \frac{\Delta^2 f(x-h)}{2} + \frac{\Delta^3 f(x)}{6}.$$

Nous remarquons que $f'''(x)h^3$ égale la différence troisième, que $f''(x)h^2$ égale la différence seconde antérieure, c'est-à-dire celle qui correspond à $x-h$, et que, pour trouver $f'(x)h$, il faut de la différence première retrancher la moitié de la différence seconde antérieure, et le sixième de la différence troisième.

Supposons maintenant que la raison de la progression arithmétique devienne dix fois plus petite, c'est-à-dire égale à $\frac{h}{10}$, et désignons par δ les différences qui correspondent à cette nouvelle progression; pour trouver ces nouvelles différences, il suffira, dans les expressions précédentes, de remplacer la lettre Δ par δ et h par $\frac{h}{10}$, ce qui donne

$$\delta^3 f(x) = \frac{f'''(x)h^3}{1000} = \frac{\Delta^3 f(x)}{1000},$$
$$\delta^2 f\left(x - \frac{h}{10}\right) = \frac{f''(x)h^2}{100} = \frac{\Delta^2 f(x-h)}{100},$$
$$\delta f(x) = \frac{f'(x)}{10} + \frac{\delta^2 f\left(x - \frac{h}{10}\right)}{2} + \frac{\delta^3 f(x)}{6}.$$

La comparaison de ces formules avec les précédentes nous donne les règles suivantes : 1° *On obtient la nouvelle diffé-*

rence troisième en divisant par 1000 l'ancienne différence troisième. 2° On obtient la nouvelle différence seconde antérieure en divisant par 100 l'ancienne différence seconde antérieure. 3° Pour trouver la nouvelle différence première, de l'ancienne différence première retranchez la moitié de l'ancienne différence seconde antérieure et le sixième de la différence troisième, divisez le résultat par 10 et ajoutez-y la moitié de la nouvelle différence seconde antérieure et le sixième de la différence troisième.

218. Exemple I. Appliquons cette méthode à l'équation

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0.$$

Cette équation a une racine comprise entre 0 et 1; pour calculer cette racine à un dixième près, nous supposerons que la raison de la progression arithmétique, qui était l'unité, devienne égale à $\frac{1}{10}$, et nous formerons le tableau suivant :

x	u	Δ	Δ^2	Δ^3
— 0,1	.....	.....	0,060	0,006
0,0	5,000	— 1,669	0,066	0,006
0,1	3,331	— 1,603	0,072	0,006
0,2	1,728	— 1,531	0,078	
0,3	0,197	— 1,453		
0,4	— 1,256			

Nous supposons ici que, dans les formules de transformation, $x = 0$. En divisant par 1000 l'ancienne différence troisième 6, on a la nouvelle 0,006; l'ancienne différence seconde antérieure 6, celle qui correspond à $x = -1$, di-

visée par 100, donne la nouvelle différence seconde antérieure 0,06, celle qui correspond à —0,1. Si de l'ancienne différence première —13, on retranche $3+1=4$, c'est-à-dire la moitié de la différence seconde antérieure 6 et le sixième de la différence troisième 6, on a —17, valeur de $f(0)$; divisant ce résultat par 10 et à −1,7, ajoutant $0{,}03+0{,}001=0{,}031$, c'est-à-dire la moitié de la nouvelle différence seconde antérieure 0,06 et le sixième de la différence troisième 0,006, on a la nouvelle différence première —1,669. Avec cela on peut continuer le tableau. On voit que la racine est comprise entre 0,3 et 04.

Si l'on veut obtenir cette racine à un centième près, on partagera l'intervalle de 0,3 à 0,4 en dix parties égales; la raison de la progression arithmétique, qui était $\frac{1}{10}$, devient égale à $\frac{1}{100}$; on déduira donc les nouvelles différences des précédentes d'après la règle énoncée.

		Δ	Δ²	Δ³
0,29	....	.....	780	6
0,30	0,197000	—148909	786	
0,31	0,048091	—148123		
0,32	—0,100032			

Les nouvelles différences renferment six chiffres décimaux; pour abréger, nous les écrivons en transportant la virgule de six rangs vers la droite. La racine est comprise entre 0,31 et 0,32.

Pour avoir la racine à un millième près, on partagera en dix parties égales l'intervalle de 0,31 à 0,32, et des der-

nières différences on déduira les nouvelles d'après le même procédé.

		Δ	Δ^2	Δ^3
0,309	....	......	7860	6
0,310	0,048091000	—14847769	7866	
0,311	0,033243231	—14839903	7872	
0,312	0,018403328	—14832031	7878	
0,313	0,003571297	—14824153		
0,314	—0,011252856			

La racine est comprise entre 0,313 et 0,314.

219. Exemple II. Dans l'exemple précédent, les racines ont été séparées par la substitution des nombres entiers; mais il n'en est pas toujours ainsi. Dans ce cas, on examine dans quel intervalle sont situées les racines qui n'ont pas été séparées, et l'on partage cet intervalle en dix parties égales. Soit l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Le tableau de substitution des nombres entiers

— 4	—29	30	—18	6
— 3	1	12	—12	6
— 2	13	0	— 6	6
— 1	13	— 6	0	6
0	7	— 6	6	6
1	1	0	12	
2	1	12		
3	13			

ne présente qu'un changement de signe, de -3 à -4; il y a une racine négative dans cet intervalle; d'ailleurs, l'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, l'équation proposée n'admet pas d'autre racine négative. La condition de réalité des racines (nº 194) étant ici satisfaite, il en résulte que l'équation a deux racines positives; mais elles ne sont pas encore séparées. Tous les nombres entiers positifs donnent en effet au polynôme des valeurs positives; on le reconnaît dès que $x=1$; car lorsqu'on arrive à une ligne oblique composée de nombres positifs, les calculs suivants, consistant à ajouter les uns aux autres des nombres positifs, conduiront toujours à des résultats positifs. D'ailleurs la valeur du polynôme pour $x=1$, et les différences correspondantes étant positives, le nombre 3 est une limite supérieure des racines; ainsi les deux racines positives sont comprises entre 0 et 3, et elles sont toutes les deux situées dans le même intervalle; il s'agit de voir dans lequel. Considérons pour cela l'équation

$$3x^2 - 7 = 0$$

que l'on obtient en égalant à zéro la dérivée du premier membre de l'équation proposée; nous savons (nº 190) qu'entre les deux racines positives de l'équation proposée, il y a une racine de la dérivée; cette racine est la racine positive $\sqrt{\frac{7}{3}}$, supérieure à 1, mais inférieure à 2. L'intervalle qui comprend les deux racines cherchées, devant comprendre aussi la quantité $\sqrt{\frac{7}{3}}$, est celui de 1 à 2. Afin de séparer les racines, nous partagerons cet intervalle en dix parties égales.

0,9			60	6
1,0	1,000	—369	66	6
1,1	0,631	—303	72	6
1,2	0,328	—231	78	6
1,3	0,097	—153	84	6
1,4	—0,056	— 69	90	6
1,5	—0,125	+ 21	96	6
1,6	—0,104	117	102	6
1,7	+0,013	219	108	6
1,8	0,232	32	114	
1,9	0,559	441		
2,0	1,000			

On voit que l'une des racines est comprise entre 1,3 et 1,4, l'autre entre 1,6 et 1,7.

Voici le calcul de ces deux racines à un centième près :

1, 9			780	
1,30	0,097000	—18909	786	6
1,31	0,078091	—18123	792	6
1,32	0,059968	—11337	798	6
1,33	0,042637	—16533	804	6
1,34	0,026104	—15729	810	
1,35	0,010375	—14919		
1,36	—0,004544			

La première racine est comprise entre 1,35 et 1,36.

Comme la seconde racine est beaucoup plus près de 1,7 que de 1,6, parce que la première valeur donne au polynôme une valeur absolue beaucoup plus petite que la seconde, on abrégera les calculs en partant de 1,7 et rétrogradant

1,69	—0,003191	16191	1020	6
1,70	+0,013000	17211		

La seconde racine est comprise entre 1,69 et 1,70.

220. **Exemple III.** Soit l'équation

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = 0.$$

La substitution des nombres entiers ne donne qu'un changement de signe, de 1 à 2. L'équation

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5 = 0$$

ayant ses racines imaginaires, l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et elle est comprise entre 1 et 2.

Exemple IV. L'équation

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = 0$$

n'a pas de racine négative ; la substitution des nombres entiers positifs ne donne qu'un changement de signe, de 3 à 4, L'équation

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0$$

a ses racines réelles 1 et $\frac{5}{3}$. Si l'équation proposée avait ses trois racines réelles, la plus petite racine 1 de la dérivée devrait donner un résultat positif, la plus grande $\frac{5}{3}$ un résultat négatif; la valeur du polynôme pour $x=1$ étant négative, on en conclut que l'équation proposée n'a qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 3 et 4.

Exemple V. La substitution des nombres entiers dans le premier membre de l'équation

$$f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 3x - 1 = 0$$

ne donne qu'un changement de signe de 1 à 2. L'équation $f'(x)=0$ ayant ses deux racines, $x'=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$, $x''=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$, réelles et comprises entre 0 et 1. Si l'équation proposée avait ses trois racines réelles, deux racines seraient comprises entre 0 et 1. Mais on peut écrire

$$f(x) = -8x^2(1-x) - (4x^2 - 3x + 1).$$

Le polynôme du second degré $4x^2 - 3x + 1$ ayant ses racines imaginaires, est toujours positif; on voit donc que, quand x varie de 0 à 1, le polynôme proposé reste constamment négatif. Ce polynôme n'admet donc qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 1 et 2.

221. Exemble VI. Considérons encore l'équation

$$f(x) = x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0.$$

Substituons d'abord les nombres entiers :

— 1	293	—112	22	6
0	181	— 90	28	6
1	91	— 62	34	6
2	29	— 28	40	6
3	1	+ 12	46	
4	13	58		
5	71			

L'équation transformée en $-x$ n'ayant qu'une variation, l'équation proposée a une racine négative et une seule; en prolongeant le tableau vers le haut, on verrait qu'elle est comprise entre —17 et —18. Les deux autres racines seront réelles et positives, ou imaginaires. Les nombres entiers positifs donnent tous des résultats positifs; car, dès $x=3$, on n'a que des nombres positifs à ajouter. Ainsi les

deux racines positives, si elles existent, seront comprises dans le même intervalle. Pour reconnaître cet intervalle, on examinera les racines de l'équation

$$f'(x) = 3x^2 + 22x - 102 = 0,$$

qui sont réelles, l'une positive, l'autre négative. La racine positive $x' = \frac{-11 + \sqrt{427}}{3} = 3{,}22\ldots$ devant être comprise entre les deux racines positives de l'équation proposée, on en conclut que, si l'équation proposée admet des racines positives, elles seront comprises entre 3 et 4. Partageons cet intervalle en dix parties égales :

2,9			400	6
3,0	1,000	−0,699	406	6
3,1	0,301	−0,293	412	
3,2	0,008	+0,119		
3,3	0,127			

Il est inutile de prolonger le tableau ; car, arrivé à 3,2, on n'a que des nombres positifs à ajouter ; ainsi il n'y a pas de changement de signe, et les deux racines sont encore renfermées dans le même intervalle. D'après la valeur de x' cet intervalle est celui de 3,2 à 3,3 ; nous le partageons en dix parties égales :

3,19			4120	6
3,20	+0,008000	−6739	4126	6
3,21	+0,001261	−2613	4132	
3,22	−0,001352	+1519		
3,23	+0,000167			

Il existe effectivement deux racines réelles et positives, l'une comprise entre 3,21 et 3,22, l'autre entre 3,22 et 3,23.

Équations d'un degré quelconque.

222. La méthode dont nous avons fait usage pour séparer les racines d'une équation du troisième degré et les calculer avec une approximation aussi grande qu'on veut, s'applique aux équations d'un degré quelconque. Après avoir substitué les nombres entiers, on partagera en dix parties égales les intervalles qui peuvent comprendre des racines, puis en dix parties égales les nouveaux intervalles, et ainsi de suite.

Établissons d'abord les formules générales au moyen desquelles on peut des anciennes différences déduire les nouvelles. Soient h et h' les racines des deux progressions arithmétiques, k leur rapport $\frac{h'}{h}$; nous désignerons par Δ les différences qui se rapportent à la première raison h, par δ celles qui se rapportent à la nouvelle raison h'. La fonction entière du degré m peut être considérée comme déterminée, soit par les valeurs qui correspondent à $m+1$ termes

$$x_0,\ x_0+h,\ x_0+2h,\ \ldots,\ x_0+mh.$$

de la première progression, soit par celles qui correspondent à $m+1$ termes

$$x_0,\ x_0+h',\ x_0+2h',\ \ldots,\ x_0+mh'$$

de la seconde; elle sera donc représentée par l'une ou l'autre des deux formules

$$u = u_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta u_0 + \frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x-x_0}{h}\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-m+1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots m},$$

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{h'}\,\delta u_0 + \frac{x - x_0}{h'}\left(\frac{x - x_0}{h'} - 1\right)\frac{\delta^2 u_0}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{x - x_0}{h'} \ldots\ldots \left(\frac{x - x_0}{h'} - m + 1\right)\frac{\delta^m u_0}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,m}.$$

Si l'on pose pour abréger $\frac{x-x_0}{h} = z$, d'où $\frac{x-x_0}{h'} = \frac{z}{k}$, ces deux formules deviennent

$$(1) \qquad u = u_0 + z\Delta u_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 u_0}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + z(z-1)\ldots\ldots(z-m-1)\frac{\Delta^m u_0}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,m},$$

$$(2) \qquad u = u_0 + \frac{z}{k}\,\delta u_0 + \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k} - 1\right)\frac{\delta^2 u_0}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k} - 1\right)\ldots\ldots\left(\frac{z}{k} - m + 1\right)\frac{\delta^m u_0}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,m}.$$

Ces deux expressions représentant le même polynôme, si on les ordonne par rapport aux puissances de la variable z, les coefficients des mêmes puissances de z doivent être égaux de part et d'autres; en égalant ces coefficients, on obtiendra des relations entre les anciennes différences et les nouvelles, qui permettront de calculer ces dernières au moyen des premières.

223, Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une équation du quatrième degré; les formules (1) et (2) se réduisent à

$$u = u_0 + z\Delta u_0 + z(z-1)\frac{\Delta^2 u_0}{1\,.\,2} + z(z-1)(z-2)\frac{\Delta^3 u_0}{1.2.3}$$

$$+ z(z-1)(z-2)(z-3)\frac{\Delta^4 u_0}{1.2.3.4},$$

$$u = u_0 + \frac{z}{k}\delta u_0 + \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k} - 1\right)\frac{\delta^2 u_0}{1.2} + \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k} - 1\right)\left(\frac{z}{k} - 2\right)\frac{\delta^3 u_0}{1.2.3}$$
$$+ \frac{z}{k}\left(\frac{z}{k} - 1\right)\left(\frac{z}{k} - 2\right)\left(\frac{z}{k} - 3\right)\frac{\delta^4 u_0}{1.2.3.4}.$$

L'identification donne les relations

$$\delta^4 = k^4 \Delta^4,$$
$$\delta^3 - \frac{3}{2}\delta^4 = k^3\left(\Delta^3 - \frac{3}{2}\Delta^4\right),$$
$$\delta^2 - \delta^3 + \frac{11}{12}\delta^4 = k^2\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4\right),$$
$$\frac{\delta}{1} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} = k\left(\frac{\Delta}{1} - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4}\right).$$

Ces équations sont du premier degré; la première donnera δ^4, la seconde δ^3, la troisième δ^2, la quatrième δ.

224. Exemple VII. Considérons l'équation du quatrième degré (n° 206)

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0.$$

Le tableau de substitution des nombres entiers

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
− 2	1	− 14	30	− 42	24
− 1	− 13	+ 16	− 12	− 18	24
0	+ 3	+ 4	− 30	6	24
1	+ 7	− 26	− 24	30	24
2	− 19	− 50	6	54	24
3	− 69	− 44	60	78	24
4	−113	+ 16	138	102	24
5	− 97	+154	240	126	24
6	+ 57	394	366	150	24

montre que l'équation a deux racines positives : une entre

1 et 2, une autre entre 5 et 6; comme elle ne présente que deux variations, elle n'a pas d'autre racine positive.

Pour obtenir ces deux racines à moins d'un dixième, nous partagerons chacun des deux intervalles en dix parties égales, et nous calculerons les nouvelles différences au moyen des formules précédentes

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1,0	7,0000	—1,1609	—3246	—24	24
1,1	5,8391	—1,4855	—3270	0	24
1,2	4,3536	—1,8125	—3270	24	
1,3	2,5411	—2,1395	—3246		
1,4	0,4016	—2,4641			
1,5	—2,0625				

La première racine est comprise entre 1,4 et 1,5.

La seconde étant plus près de 6 que de 5, nous effectuerons le calcul en remontant.

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
5,7	— 9,2949	19,9045	2,1570	1104	24
5,8	10,6096	22,0615	2,2674	1128	24
5,9	32,6711	24,3289	2,3802	1152	24
6,0	57,0000	26,7091	2,4954	1176	24

Cette seconde racine est comprise entre 5,7 et 5,8.

L'équation proposée a d'ailleurs deux racines négatives : une comprise entre 0 et —1, l'autre entre —1 et —2. On les calculerait de la même manière.

225. EXEMPLE VIII. Soit l'équation

$$f(x) = 8x^4 - 40x^3 + 57x^2 - 40x + 49 = 0.$$

La transformée en $-x$ n'ayant pas de variation, l'équa-

tion n'a pas de racine négative; elle peut avoir 0 ou 2, ou 4 racines positives. La substitution des nombres entiers positifs

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
−1	194	−145	130	−144	192
0	49	−15	−14	48	192
1	34	−29	34	240	192
2	5	5	274	432	192
3	10				

ne présente pas de variation. L'équation

$$f'(x) = 32x^3 - 120x^2 + 114x - 40 = 0$$

n'a qu'une racine réelle, et elle est comprise entre 2 et 3. On en conclut que l'équation proposée ne pourra avoir au plus que *deux* racines réelles positives; si elles existent, elles seront comprises entre 2 et 3. On partagera donc cet intervalle entre dix parties égales.

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
2,0	5,0000	−3,4852	3352	1728	192
2,1	1,5148	−3,1500	5080	1920	192
2,2	−1,6352	−2,6420	7000	2112	192
2,3	−4,2772	−1,9420	9112	2304	192
2,4	−6,2192	−1,0308	1,1416	2496	192
2,5	−7,2500	0,1108	1,3912	2688	192
2,6	−7,1392	1,5020	1,6600	2880	192
2,7	−5,6372	3,1620	1,9480	3072	
2,8	−2,4752	5,1100	1,2552		
2,9	2,6348	7,3652			
3,0	10,0000				

Ainsi l'équation a deux racines réelles positives, et comprises, l'une entre 2,1 et 2,2, l'autre entre 2,8 et 2,9.

226. Exemple IX. Soit l'équation

$$x^4 - 4x^3 + x + 4 = 0.$$

A l'inspection du tableau des différences

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
—1	8	— 4	2	—12	24
0	4	— 2	—10	12	24
1	2	—12	2	36	
2	—10	—10	38		
3	—20	28			
4	+ 8				

on voit que l'équation admet deux racines positives, et comprises, l'une entre 1 et 2, l'autre entre 3 et 4; elle n'admet pas d'autres racines positives, puisque son premier membre ne présente que deux variations. La transformée en $-x$ présentant deux variations, l'équation peut avoir deux racines négatives; mais comme -1 est une limite inférieure des racines réelles, les racines négatives devraient être comprises entre 0 et -1; or, dans cet intervalle, les deux premiers termes étant positifs, ainsi que la partie $x+4$, le polynôme reste constamment positif; l'équation n'admet donc pas de racines négatives.

227. Exemple X. Considérons comme dernier exemple l'équation du cinquième degré

$$x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0.$$

Le tableau des différences

		Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
—3	—139	141	—142	132	—120	120
—2	+ 2	— 1	— 10	12	0	120
—1	+ 1	— 11	+ 2	12	120	
0	— 10	— 9	+ 14	132		
1	— 19	+ 5	146			
2	— 14	151				
3	+137					

montre que l'équation a deux racines négatives et comprises, l'une entre 0 et —1, l'autre entre —2 et —3; la transformée en $-x$ ne présentant que deux variations, l'équation n'a pas d'autre racine négative. Quant aux racines positives, il y en a une entre 2 et 3; comme le premier membre de l'équation présente trois variations, il peut y avoir deux autres racines positives. D'après le tableau des différences, $3+4$ ou 7 est une limite supérieure; mais si nous groupons les termes de cette manière

$$(x^5-3x^3-8x-10)+x^2=0,$$

nous trouvons une limite supérieure 3 beaucoup moins élevée. En mettant l'équation sous la forme

$$-x^3(4-x^2)-x(8-x-x^2)-10=0,$$

nous voyons que le premier membre reste constamment négatif, quand x varie de 0 à 2. Il est donc à examiner si l'équation peut avoir trois racines entre 2 et 3. Si l'on écrit la dérivée

$$5x^4-9x^2+2x-8$$

sous la forme

$$(5x^4 - 9x^2 - 8) + 2x,$$

on voit que 2 est une limite supérieure des racines de cette dérivée. Ainsi l'équation proposée n'admet qu'une racine positive.

228. Dans les exemples précédents, nous avons réussi à séparer les racines en substituant des valeurs équidistantes et nous aidant de la considération de la dérivée. Nous supposons que l'on s'est assuré d'avance que le polynôme proposé et sa dérivée n'admettent pas de racines égales. On arrivera toujours avec certitude à la séparation des racines si l'on pousse assez loin les subdivisions. Pour le faire voir, nous nous servirons de la formule

$$(1) \qquad f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h),$$

que l'on déduit de la formule générale (5) démontrée au n° 137, en s'arrêtant aux deux premiers termes.

De quelque manière que soient distribuées les racines réelles du polynôme $f(x)$ et celles de sa dérivée $f'(x)$, nous pouvons imaginer des intervalles

$$x', \; x'', \; x''', \ldots\ldots$$

tels que chacun d'eux ne comprenne aucune racine du polynôme proposé, ou bien en comprenne une sans en comprendre aucune de la dérivée. Considérons d'abord un intervalle ne comprenant aucune racine du polynôme proposé, par exemple l'intervalle de x' à x''. Appelons m une quantité positive inférieure à la plus petite valeur absolue du polynôme $f(x)$, quand x varie de x' à x'', et M' une quantité supérieure à la plus grande valeur absolue de la dérivée $f'(x)$ dans le même intervalle. Subdivisons l'inter-

valle $x'-x'$ en parties égales à h, et plus petites que $\frac{m}{M'}$. Désignons par x_0 et x_0+h deux termes consécutifs de la progression arithmétique, et posons $x=x_0+\alpha$; on a

$$f(x)=f(x_0+\alpha)=f(x_0)+\alpha f'(x_0+\theta\alpha).$$

Quand x varie de x_0 à x_0+h, α varie de 0 à h; le second terme $\alpha f'(x_0+\theta\alpha)$ est plus petit que hM' ou que m, et par suite plus petit que $f(x_0)$, en valeur absolue. Ainsi, dans chacun des intervalles partiels, le premier terme $f(x_0)$ est plus grand que le second en valeur absolue.

Réciproquement, si la valeur absolue de $f(x_0)$ est plus grande que la plus grande valeur absolue de $hf'(x)$, quand x varie de x_0 à x_0+h, il est clair que de x_0 à x_0+h le polynôme $f(x)$ conservera le signe de son premier terme $f(x_0)$, et que par conséquent il n'y aura aucune racine dans cet intervalle.

Considérons maintenant un intervalle comprenant une racine du polynôme, et une seule, et de plus ne comprenant aucune racine de la dérivée, par exemple l'intervalle de x'' à x'''. On appliquera à la dérivée ce que nous avons dit du polynôme proposé. Appelons m' une quantité positive inférieure à la plus petite valeur absolue de la dérivée $f'(x)$, quand x varie de x'' à x''', et M'' une quantité supérieure à la plus grande valeur absolue de la seconde dérivée $f''(x)$ dans le même intervalle. Subdivisons l'intervalle $x'''-x''$ en parties égales à h et plus petites que $\frac{m'}{M''}$. Soient toujours x_0 et x_0+h deux termes consécutifs de la progression arithmétique, et posons $x=x_0+\alpha$, on a

$$f'(x)=f'(x_0+\alpha)=f'(x_0)+\alpha f''(x_0+\theta\alpha).$$

Quand x varie de x_0 à x_0+h, α varie de o à h; le second terme $\alpha f''(x_0+\theta\alpha)$ est plus petit que hM″ ou que m', et par suite plus petit que $f'(x_0)$ en valeur absolue. Ainsi, dans chacun des intervalles partiels, le premier terme $f'(x_0)$ est plus grand que le second en valeur absolue.

Réciproquement, si la valeur absolue de $f'(x_0)$ est plus grande que la plus grande valeur de $hf''(x)$, quand x varie de x_0 à x_0+h, la dérivée $f'(x)$ n'a aucune racine dans cet intervalle. Si les deux quantités $f(x_0)$, $f(x_0+h)$ ont le même signe, le polynôme proposé $f(x)$ n'admet aucune racine entre x_0 et x_0+h; si ces deux quantités ont des signes contraires, le polynôme admet une racine, et une seule.

On conclut de ce qui précède que l'on arrivera à une progression arithmétique ayant une raison h assez petite pour que, dans chaque intervalle partiel, $f(x_0)$ soit plus grand que $hf'(x)$, ou $f'(x_0)$ plus grand que $hf''(x)$ en valeur absolue. Les intervalles qui présentent le premier caractère ne comprennent aucune racine du polynôme proposé. Les intervalles qui présentent le second caractère comprennent zéro ou une racine, suivant que $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$ ont le même signe ou des signes contraires. De cette manière, les racines du polynôme proposé seront certainement séparées.

229. On procédera donc de la manière suivante : après avoir substitué des nombres équidistants (par exemple les nombres entiers consécutifs), depuis la limite inférieure à la limite supérieure des racines réelles, on examinera séparément chacun des intervalles. Considérons un intervalle présentant un changement de signe; si l'on reconnaît que la valeur absolue de $f'(x_0)$ est plus grande que celle de

$hf''(x)$, quand x varie de x_0 à x_0+h, on en conclura que l'intervalle ne comprend qu'une racine. Si cette condition n'est pas remplie, ou du moins si l'on ne peut pas reconnaître qu'elle est remplie, il faudra subdiviser l'intervalle en dix parties égales. Considérons maintenant un intervalle qui ne présente pas de changement de signe ; si l'on reconnaît que la valeur absolue de $f(x_0)$ est plus grande que celle de $hf'(x)$, on en conclura qu'il n'y a aucune racine dans l'intervalle; ce caractère échappant, on examinera si la valeur absolue de $f'(x_0)$ est plus grande que celle de $hf''(x)$, ce qui permettra encore de conclure qu'il n'y a aucune racine dans l'intervalle. Quand aucun de ces deux caractères ne se manifestera, ou du moins quand on ne pourra en reconnaître aucun, il faudra subdiviser l'intervalle en dix parties égales.

Pour appliquer la méthode précédente, il faut savoir trouver un nombre égal ou supérieur à la plus grande valeur absolue du polynôme $f'(x)$ ou $f''(x)$, quand x varie de x_0 à x_0+h. Ceci n'offre aucune difficulté dans la pratique; au reste, voici un moyen qui réussit toujours : que l'on prenne tous les termes positivement, et que l'on remplace x par le plus grand des deux nombres x_0 et x_0+h en valeur absolue, on obtiendra une quantité positive plus grande que la valeur absolue du polynôme dans l'intervalle considéré.

Les remarques précédentes, qui permettent d'opérer avec certitude la séparation des racines par des substitutions dans le polynôme proposé et sa dérivée, m'ont été communiquées par M. Bouquet.

CHAPITRE IV.

MÉTHODES D'APPROXIMATION.

Méthode par interpolation.

230. Quand on a obtenu une racine d'une équation avec un certain degré d'approximation, par exemple à un dixième ou à un centième près, on peut en déduire aisément une valeur beaucoup plus approchée. La méthode la plus simple est celle d'interpolation. Soit $u = f(x)$ le premier membre de l'équation; on a trouvé deux valeurs x_0 et $x_0 + h$ qui comprennent une racine et une seule. Reprenons la formule (n° 213)

$$u = u_0 + \frac{z}{1}\Delta u_0 - \frac{z(1-z)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots$$

Nous cherchons la valeur de x ou de z qui annule la fonction; nous aurons donc pour déterminer z l'équation

$$(1) \qquad 0 = u_0 + z\Delta u_0 - \frac{z(1-z)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots$$

que l'on résoudra par approximations successives. En effet, la raison h étant très-petite, les différences successives diminuent très-rapidement; si l'on néglige les différences d'un ordre supérieur au premier, on a l'équation du premier degré

$$u_0 + z\Delta u_0 = 0,$$

d'où l'on déduit la valeur approchée

$$z = -\frac{u_0}{\Delta u_0}.$$

On peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad z = -\frac{u_0}{\Delta u_0} + \left[\frac{z(1-z)}{1.2}\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0} - \ldots\ldots\right];$$

L'erreur commise quand on prend pour z la valeur approchée $-\frac{u_0}{\Delta u_0}$ est exprimée par la parenthèse ; pour se rendre compte de l'erreur, on évaluera rapidement et par excès cette parenthèse.

Si l'on voulait une approximation plus grande, on remplacerait dans la parenthèse z par la première valeur approchée $-\frac{u_0}{\Delta u_0}$, ce qui donnerait une seconde valeur plus approchée que la précédente, et ainsi de suite.

231. Quand il s'agit d'une équation du troisième degré, l'erreur commise ε a pour expression

$$\varepsilon = \frac{z(1-z)}{1.2}\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0} - \frac{z(1-z)(2-z)}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^3 u_0}{\Delta u_0}.$$

Si les deux différences $\Delta^2 u_0$ et $\Delta^3 u_0$ ont le même signe, les deux termes ayant des signes contraires, on négligera le second terme, qui est en général beaucoup plus petit que le premier, et on dira que l'erreur, en valeur absolue, est moindre que $\frac{z(1-z)}{2}\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0}$. Le produit $z(1-z)$ ayant sa valeur maximum pour $z=\frac{1}{2}$, est plus petit que $\frac{1}{4}$, ce qui donne pour limite supérieure de l'erreur $\frac{1}{8}\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta u_0}$.

Si les deux différences $\Delta^2 u_0$ et $\Delta^3 u_0$ ont des signes contraires, les deux termes ayant le même signe et le facteur $2-z$ étant plus petit que 2, l'erreur en valeur absolue

est moindre que

$$\frac{1}{4\Delta u_0}\left(\frac{\Delta^2 u_0}{2}-\frac{\Delta^3 u_0}{3}\right).$$

Pour une équation du degré m, l'erreur est moindre que la somme des valeurs absolues des termes de l'expression

$$\frac{1}{4\Delta u_0}\left(\frac{\Delta^2 u_0}{2}+\frac{\Delta^3 u_0}{3}+\frac{\Delta^4 u_0}{4}+\ldots\ldots\right).$$

Considérons l'équation du troisième degré,

$$x^3+3x^2-17x+5=0$$

dont nous avons calculé la plus petite racine positive à un millième près (n° 218). Supposons d'abord que nous n'ayons pas été plus loin que les dixièmes par les différences; la racine est comprise entre 0,3 et 0,4.

Nous avons la correction approchée

$$z=\frac{0,197}{0,453}=0,1355\ldots\ldots$$

L'erreur est négative et moindre en valeur absolue que

$$\frac{42z(1-z)}{1453}<\frac{42z}{1453}<\frac{42\times 0,14}{1453}<0,0041.$$

Ainsi la valeur de z est comprise entre 0,131 et 0,136. Comme nous avons pris dans le calcul de z le dixième pour unité, la correction sera 0,013, et l'on aura la première racine 0,313 avec *trois* chiffres décimaux exacts, par défaut.

Nous avons poussé le calcul de cette première racine jusqu'aux millièmes par les différences. La formule de correction approchée donne

$$z=\frac{3571297}{14824153}=0,24097\ldots\ldots$$

L'erreur est négative et moindre en valeur absolue que

$$\frac{7884}{14824153 \times 8} < 0,00007.$$

On prendra donc $z = 0,2409$, ce qui donne la racine 0,3132409 avec sept décimales exactes, par défaut.

232. Considérons maintenant l'équation du quatrième degré

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0,$$

dont nous avons calculé les racines positives à un dixième près (n° 224). Pour la première racine, la méthode d'interpolation nous donne la correction

$$z = \frac{0,4016}{2,4641} = 0,163\ldots\ldots$$

L'erreur commise est

$$\frac{z(1-z)}{2}\frac{3198}{24641} + \frac{z(1-z)(2-z)}{6}\frac{48}{24641} - \frac{z(1-z)(2-z)(3-z)}{24}\frac{24}{24641};$$

négligeant le dernier terme, qui est négatif, on voit qu'elle est positive et moindre que

$$\frac{1}{4 \times 24641}\left(\frac{3198}{2} + \frac{48}{3}\right) = \frac{1615}{98564} < 0,017.$$

Ainsi la valeur de z est comprise entre 0,163 et 0,180. On prendra 0,17, ce qui donne la racine $x = 1,417$ à moins d'un millième près.

Méthode de Newton.

233. Voici une autre méthode d'approximation, connue sous le nom de méthode de Newton. Supposons toujours qu'une racine, et une seule, soit comprise entre x_0 et x_0+h. Représentons cette racine par $x_0+\alpha$, α étant plus petit que h, et développons $f(x_0+\alpha)$ suivant la loi connue,

$$f(x_0+\alpha)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{\alpha}{1}+f''(x_0)\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots\ldots;$$

nous aurons pour déterminer l'inconnue α l'équation

$$(3)\qquad 0=f(x_0)+f'(x_0)\alpha+f''(x_0)\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots\ldots,$$

L'inconnue α étant une quantité très-petite, on pourra négliger les puissances supérieures à la première, et l'on aura l'équation du premier degré

$$f(x_0)+\alpha f'(x_0)=0,$$

d'où l'on déduit la valeur approchée

$$\alpha=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

On peut écrire l'équation (3) sous la forme

$$(4)\quad \alpha=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\left[\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}\alpha^2+\frac{f'''(x_0)}{2.3f'(x_0)}\alpha^3+\ldots\ldots\right].$$

L'erreur commise quand on prend la valeur approchée $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ est exprimée par la parenthèse ; pour se rendre compte de l'erreur, on évaluera rapidement et par excès cette parenthèse.

284. Mais on peut obtenir une expression beaucoup plus simple du reste. La formule générale démontrée au nº 137, si l'on s'arrête à la seconde dérivée, donne

$$(5)\qquad f(x_0+\alpha)=f(x_0)+\frac{\alpha}{1}f'(x_0)+\frac{\alpha^2}{1.2}f''(x_0+\theta\alpha);$$

on aura donc pour déterminer l'inconnue α l'équation

$$0=f(x_0)+\frac{\alpha}{1}f'(x_0)+\frac{\alpha^2}{1.2}f''(x_0+\theta\alpha),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$(6)\qquad \alpha=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{\alpha^2}{2}\frac{f''(x_0+\theta\alpha)}{f'(x_0)}.$$

Si l'on prend la valeur approchée $\alpha=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, l'erreur commise a pour expression

$$(7)\qquad \varepsilon=-\frac{\alpha^2}{2}\frac{f''(x_0+\theta\alpha)}{f'(x_0)}.$$

Pour évaluer cette erreur, on remplacera $f''(x_0+\theta\alpha)$ par la plus grande valeur absolue de la seconde dérivée $f''(x)$, quand x varie de x_0 à x_0+h.

La quantite $\frac{f''(x_0+\theta\alpha)}{2f'(x_0)}$ est ordinairement plus petite que l'unité, et par conséquent l'erreur commise moindre que α^2. Ainsi l'application de cette méthode double en général le nombre des chiffres décimaux exacts ; par exemple, si h est moindre que 0,001, l'erreur commise sera en général moindre que 0,000001 ; on connaissait la racine avec trois chiffres décimaux exacts ; on l'a maintenant avec six chiffres décimaux. On peut répéter l'opération plusieurs fois, en se servant de la valeur donnée par une première opération pour en déduire une valeur plus approchée, etc.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, la valeur x_0 approchée par défaut; les mêmes raisonnements et les mêmes formules s'appliquent au cas où elle est approchée par excès; il suffit de rendre h négative.

235. Les deux méthodes d'approximation précédentes ont une signification géométrique très-simple. Représentons par deux ordonnées AC et BD les valeurs de signes contraires du polynôme pour $x=x_0$ et $x=x_1=x_0+h$, et traçons la courbe du point C au point D. Cette courbe coupe l'axe OX en un point M qu'il s'agit de déterminer. Il est aisé de voir que la méthode d'interpolation par parties proportionnelles consiste à remplacer l'arc de courbe CMD par la corde CD, tandis que la méthode de Newton revient à mener la tangente CQ au point C.

Fig. 1.

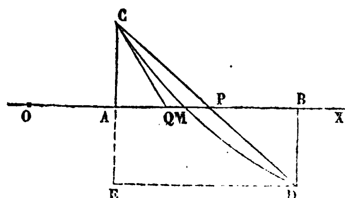
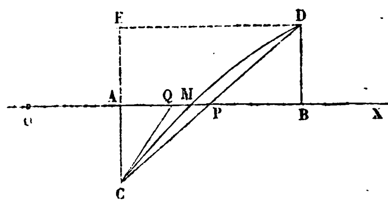


Fig. 2.



En effet, par le point D traçons une parallèle DE à l'axe OX; on a $\Delta u_0 = \pm(\text{BD} + \text{AC}) = \pm\text{CE}$; les triangles semblables ACP, CED, donnent

$$\frac{\text{AP}}{\text{AB}} = \frac{\text{CA}}{\text{CE}},$$

d'où

$$z = \frac{\text{AP}}{h} = -\frac{u_0}{\Delta u_0}.$$

D'autre part, on sait que la tangente trigonométrique de

l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe OX est égale à $f'(x)$. Le triangle rectangle CAQ donne

$$AQ = AC.\cot CQA = \frac{AC}{\tang CQA};$$

on a donc

$$\alpha = AQ = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

236. L'emploi de la méthode de Newton exige quelques précautions particulières. Nous avons supposé que l'intervalle de x_0 à x_1 ne comprend qu'une racine du polynôme $f(x)$; nous supposerons, en outre, que la première dérivée ainsi que la seconde dérivée ne changent pas de signe dans cet intervalle. L'arc de courbe CMD est convexe et le signe de la seconde dérivée indique de quel côté cet arc tourne sa concavité; la concavité est tournée vers le haut ou vers le bas, suivant que la seconde dérivée est positive ou négative. Afin d'être sûr d'approcher davantage de la racine, on mènera la tangente au point C quand $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ auront le même signe; au point D quand $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ auront des signes contraires. Dans le premier cas, posant $x = x_0 + \alpha$, on aura la formule de correction approchée $\alpha = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Dans le second cas, posant $x = x_1 + \alpha$, on aura $\alpha = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ (α est positif dans le premier cas, négatif dans le second).

Pour se convaincre de cette règle, il suffit de tracer la figure dans les diverses dispositions qu'elle peut affecter. La figure 1 du numéro précédent se rapporte au cas où $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ ont des valeurs positives; la figure 2 au cas où $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ ont des valeurs négatives; la tangente au

point C étant placée entre la courbe et l'ordonnée CA, rencontre l'axe horizontal en un point Q situé entre A et B; on voit d'ailleurs que le point M est compris entre les points P et Q; la méthode d'interpolation par parties proportionnelles donne une correction trop forte; la méthode de Newton une correction trop faible, et par conséquent, la vraie valeur de la racine est comprise entre les quantités calculées OQ et OP.

Les figures 3 et 4 se rapportent au cas où $f(x_0)$ et $f''(x_0)$ ont des signes contraires; la tangente au point D, étant placée entre la courbe et l'ordonnée DB, rencontre l'axe en un point Q situé entre A et B; le point M est encore compris entre les points P et Q; la première correction donne un résultat trop faible, la seconde un résultat trop fort; de sorte que la vraie valeur de la racine est toujours comprise entre les quantités calculées OP et OQ. Si l'on menait la tangente au point C, cette tangente pourrait rencontrer l'axe au delà du point B, et l'on s'éloignerait de la racine au lieu de s'en rapprocher.

Fig. 3

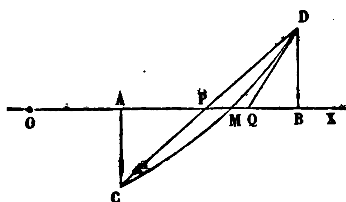
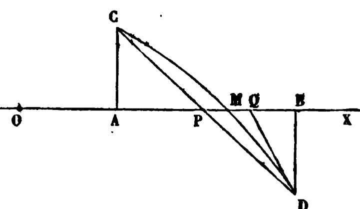
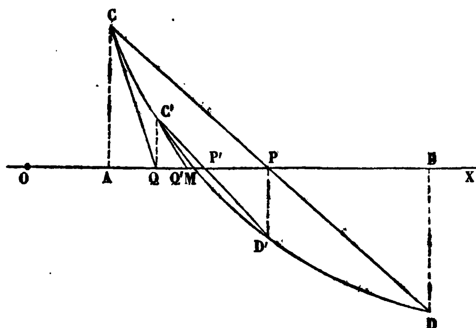


Fig. 4.



Quand on emploie ainsi simultanément les deux méthodes, on est dispensé d'évaluer les erreurs; l'un des résultats étant trop fort, l'autre trop faible, la vraie valeur de la racine est comprise entre eux, et l'on sait d'une manière précise l'approximation sur laquelle on peut compter.

Si l'on appliquait plusieurs fois successivement l'une et l'autre méthode, on mènerait une série de cordes CD, C'D', ... et une série de tangentes telles que CQ, C'Q, ...



On obtiendrait ainsi deux séries de points P, P', ..., Q, Q', ... qui se rapprocheraient très-rapidement du point M où la courbe coupe l'axe.

Exemples.

237. Reprenons l'équation

$$x^3 + 3x^2 - 17x + 5 = 0,$$

dont la plus petite racine est comprise entre 0,3 et 0,4 (n° 218). La fonction étant positive pour $x = 0,3$, ainsi que la seconde dérivée, la courbe a la disposition de la figure 1. On mènera la tangente au point C, et la méthode de Newton donnera la correction approchée par défaut

$$a = \frac{0{,}197}{14{,}93} = 0{,}01319\ldots\ldots$$

Pour évaluer l'erreur d'après la formule (7), comme $f''(x)$ croît avec x, on aura

$$\varepsilon < \frac{a^2 f''(0{,}4)}{2 \times 14{,}93} < 0{,}00006.$$

Ainsi, la quantité α est comprise entre 0,01319 et 0,01326. On prendra $\alpha = 0,0132$ et l'on aura la racine 0,3132 avec quatre décimales exactes. La méthode d'interpolation ne donnait que trois décimales (n° 231).

Quand il s'agit d'une équation du troisième degré, la quantité $hf'(x_0)$, et par suite $f'(x_0)$ se déduit d'une manière très-simple du tableau des différences, comme nous l'avons remarqué au n° 217.

238. Nous avons vu (n° 224) que l'équation

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 15x + 3 = 0$$

a sa plus grande racine comprise entre 5,7 et 5,8. Pour $x = 5,7$ la fonction étant négative et la seconde dérivée positive, la courbe a la disposition indiquée par la figure 3; on mènera la tangente au point D et l'on aura la correction approchée

$$\alpha = -\frac{10,6096}{209,648} = -0,0506\ldots\ldots$$

L'erreur commise a pour expression

$$\frac{\alpha^2}{2}\frac{f''(x_1 - \theta\alpha)}{f'(x_1)} < \frac{\alpha^2}{2}\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} < 0,002.$$

La valeur de α est donc comprise entre $-0,050$ et $-0,053$; on prendra $\alpha = -0,05$, et l'on aura la racine $x = 5,75$ par excès, à moins d'un demi-centième près.

La première méthode d'approximation donne

$$z = \frac{6,2949}{19,9045} = 0,466\ldots\ldots$$

Si l'on emploie simultanément les deux méthodes, on voit que x est compris entre 5,7466, ... et 5,7483, ... ; on prendra 5,75 par excès, à moins d'un demi-centième près, comme précédemment.

CHAPITRE V.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

239. Jusqu'ici nous n'avons considéré que des équations algébriques. On procède d'une manière analogue pour les équations transcendantes. Soit l'équation $f(x) = 0$, dont le premier membre est une fonction continue de x. On substituera des valeurs équidistantes de x et l'on aura recours à la dérivée $f'(x)$. Si la dérivée conserve le même signe dans un intervalle, cet intervalle comprendra zéro ou une racine de l'équation proposée, suivant que les résultats de la substitution seront de même signe ou de signes contraires. On subdivisera ensuite les intervalles qui laissent de l'incertitude. Les explications que nous avons données au n° 228 s'appliquent aux équations transcendantes comme aux équations algébriques; car la formule (1), dont nous nous sommes servis, a été démontrée pour les fonctions continues quelconques (n° 137). Ainsi, on pourra pousser les subdivisions assez loin pour que les racines soient séparées avec certitude; ceci suppose toutefois que la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ n'ont pas de racines communes.

Une fois qu'on aura séparé les racines et qu'on les aura obtenues avec un ou deux chiffres décimaux, on appliquera les méthodes d'approximation dont il a été question dans le chapitre précédent; mais ici quelques observations sont nécessaires. La méthode de Newton s'applique sans difficulté; mais la formule (C) du n° 213, d'où nous déduisons l'expression de l'erreur dans l'interpolation par parties proportionnelles, n'a été établie que pour les fonctions entières. A la vérité, les considérations géométriques dont nous

avons fait usage dans le chapitre précédent sont vraies pour les fonctions continues quelconques ; de sorte que si l'on emploie simultanément les deux méthodes de correction, on aura deux valeurs comprenant la racine, et par conséquent on connaîtra l'approximation sur laquelle on peut compter. Quelques exemples feront bien comprendre la manière de procéder.

240. Exemple I. Soit l'équation

$$10^x = 257x.$$

Si l'on prend les logarithmes vulgaires des deux membres, cette équation devient

$$f(x) = x - (\log x + \log 257) = x - (\log x + 2{,}4099312) = 0.$$

Substituons d'abord à la variable x les nombres entiers 0, 1, 2, 3, ..., en nous bornant à reconnaître le signe de $f(x)$ sans faire de calcul. Pour $x = 0$, $\log x = -\infty$; donc, $f(x) = +\infty$. Pour $x = 1$, $\log 1 = 0$, $f(1) < 0$. Ainsi, il y a une première racine comprise entre 0 et 1. Pour $x = 2$, la parenthèse étant supérieure à 2, on aura encore évidemment $f(2) < 0$. Si l'on ajoute le logarithme de 3, qui est 0,477, au nombre constant 2,409, on voit de suite que l'on aura un résultat plus petit que 3 ; donc $f(3) > 0$. Ainsi, il y a une seconde racine entre 2 et 3. L'équation proposée n'a pas d'autre racine réelle ; car la dérivée $f'(x) = 1 - \frac{M}{x}$ n'a qu'une racine $x = M$. (M désigne ici le module des logarithmes vulgaires.)

Proposons-nous de calculer la racine comprise entre 2 et 3, d'abord à un dixième. On substituera à x les valeurs successives 2,1 ; 2,2 ; ..... Mais on peut diminuer beaucoup le nombre des substitutions. Le logarithme de 2,1 est

0,322 ; ajouté à 2,409, il donne 2,73 ; il en résulte que $x = 2,7$ donnera encore un résultat négatif. Il suffit de lire les deux premiers chiffres des logarithmes de 2,8 et de 2,9 pour voir que $x = 2,8$ donnera un résultat négatif, 2,9 un résultat positif. Ainsi, la racine est comprise entre 2,8 et 2,9.

Cherchons-la maintenant à un centième. Le logarithme de 2,81 ajouté à 2,409 donne 2,85 ; il en résulte que 2,85 donnera encore un résultat négatif. Essayons 2,86 ; le logarithme de 2,86 ajouté à 2,409 donne 2,866 ; le résultat est négatif. Le logarithme de 2,87 ajouté à 2,409 donne 2,867 ; le résultat est positif. Ainsi la racine est comprise entre 2,86 et 2,87.

Calculons-la à un millième. Le logarithme de 2,861 ajouté à 2,4099 donne 2,866 : on en conclut que 2,86 donne encore un résultat négatif. On essayera 2,867 et 2,868 ; le premier donne un résultat négatif, le second un résultat positif. Ainsi, la racine est comprise entre 2,867 et 2,868.

Le logarithme de 2,8671 ajouté à 2,40993 donne 2,86737 ; on en conclut que la racine est plus grande que 2,8673. En remplaçant dans le premier membre de l'équation x successivement par 2,8674 et 2,8675, on obtient deux résultats de signes contraires, $-0,0000214$ et $+0,0000635$. Ainsi, la racine est comprise entre 2,8674 et 2,8675.

On fera ensuite une interpolation par parties proportionnelles. Quand on passe d'une valeur à l'autre, la variation de la fonction est 0,0000849 ; on a donc

$$z = \frac{214}{849} = 0,252\ldots..$$

Les deux termes de la fraction étant approchés, à moins

d'une unité près, l'erreur commise sur le quotient est moindre que 0,007; on prendra donc $z = 0{,}25$ et $x = 2{,}867425$. On ne peut pas aller plus loin avec les tables de Callet.

241. Exemple III. Considérons l'équation

$$x^x = 100,$$

qui été traitée par Euler. Si l'on prend les logarithmes vulgaires, l'équation s'écrit

$$f(x) = x \log x - 2 = 0,$$

et l'on a

$$f'(x) = \log x + \mathrm{M}; \quad f''(x) = \frac{\mathrm{M}}{x}.$$

Quand x varie de 0 à 1, $f(x)$ reste négative et il n'y a pas de racine dans cet intervalle. Substituons les nombres entiers consécutifs

$$\begin{array}{llll}
x = 2, & \log 2 = 0{,}301, & 2\log 2 = 0{,}60, & f(x) = -1{,}40, \\
x = 3, & \log 3 = 0{,}477, & 3\log 3 = 1{,}43, & f(x) = -0{,}57, \\
x = 4, & \log 4 = 0{,}602, & 4\log 4 = 2{,}41, & f(x) = +0{,}41.
\end{array}$$

La dérivée s'annule pour $x = \frac{1}{e}$, et reste positive pour toutes les valeurs de x supérieures à cette valeur; on en conclut que $f(x)$ va en croissant constamment quand x varie de $\frac{1}{e}$ à $+\infty$; cette fonction passe donc une fois et une seule fois par zéro. Ainsi, l'équation proposée n'admet qu'une racine réelle, et cette racine est comprise entre 3 et 4.

Afin de diminuer le nombre des substitutions, effectuons rapidement une interpolation par parties proportionnelles

entre 3 et 4, afin d'avoir une indication du chiffre des dixièmes. On a

$$z = \frac{0,57}{0,98} = 0,58.$$

Essayons 3,5.

$$x = 3,5,\quad \log x = 0,54406804,\quad f(x) = -0,09576186,$$
$$x = 3,6,\quad \log x = 0,55630250,\quad f(x) = +0,00268900.$$

La racine est comprise entre 3,5 et 3,6 et très-rapprochée de ce dernier nombre.

En appliquant la méthode de Newton et partant de la limite supérieure, on a la correction

$$\alpha = -\frac{268900}{99056098} = -0,00271452.$$

L'erreur commise est moindre que

$$\frac{\alpha^2}{2}\frac{f''(3,5)}{f'(3,6)} < 0,0000006.$$

La valeur α est donc comprise entre $-0,0027145$ et -0.0027152; on prendra $\alpha = -0,002715$ et l'on aura la racine $x = 3,597285$ avec six décimales exactes.

242. Exemple III. Soit l'équation

$$f(x) = x - \cos x = 0,$$

traitée aussi par Euler. On a

$$f'(x) = 1 + \sin x,\quad f''(x) = \cos x.$$

Pour $x = 0$, on a $f(x) = -1$; pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $f(x) = +\frac{\pi}{2}$. L'équation admet une racine dans cet intervalle, et elle n'en

admet qu'une, puisque la dérivée ne s'annule pas. Au delà de $\frac{\pi}{2}$, x étant plus grand que 1, il n'y a plus de racine. Il n'y a pas non plus de racine négative. Ainsi l'équation proposée n'admet qu'une racine réelle, et elle est comprise entre 0 et 1.

Pour faire les substitutions, nous nous servirons de la partie des tables de Callet qui donne les sinus naturels suivant la nouvelle division de la circonférence et de la partie qui donne les longueurs mêmes de ces arcs. L'arc égal à 1 vaut à peu près 64 degrés modernes. En suivant de l'œil les deux tables, on voit que le changement de signe a lieu de 47° à 48°.

$$x = 47^\circ = 0,738,\quad \cos x = 0,740,\quad f(x) = -0,002,$$
$$x = 48^\circ = 0,754,\quad \cos x = 0,729,\quad f(x) = +0,025.$$

La racine est comprise entre 47° et 48° et très-rapprochée du premier de ces nombres. L'interpolation par parties proportionnelles donne $z = \frac{2}{27} < 0,1$. Ainsi il est probable que la racine est comprise entre 47° et 47°,1.

Voici le nouveau calcul de substitution :

$x = 47^\circ =$	0,73827 427	$x = 47^\circ,1 =$	0,73984 507
$\cos x =$	0,73963 109	$\cos x =$	0,73857 302
$f(x) =$	$-$0,00135 682	$f(x) =$	$+$0,00127 205

La racine est comprise entre 47° et 47°,1.

La méthode de Newton donne la correction

$$\alpha = -\frac{0,00127\,205}{1,67417\,349} = -0,00075980\ldots..$$

Si l'on retranche cette valeur de α de la longueur de l'arc de 47°,1, on a une valeur trop grande 0,73908527.....

L'erreur commise est moindre que

$$\frac{0{,}0008^2 \times 0{,}74}{2 \times 1{,}67} < 0{,}00000015 \ldots.$$

En retranchant cette correction de la valeur précédente, on a une valeur trop petite 0,73908512..... On a ainsi la racine $x = 0{,}7390852$ avec sept décimales exactes.

243. Exemple IV. Soit l'équation

$$f(x) = x - \operatorname{tang} x = 0.$$

On a

$$f'(x) = -\operatorname{tang}^2 x, \quad f''(x) = -\frac{2 \operatorname{tang} x}{\cos^2 x}.$$

On voit d'abord que les racines de l'équation sont deux à deux égales et de signes contraires. Quand x varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, l'arc étant plus petit que la tangente, la fonction est négative; de $\frac{\pi}{2}$ à π, la tangente étant négative, la fonction est positive; ainsi il n'y a pas de racine de 0 à π. Quand x varie de π à $\frac{3\pi}{2}$, la fonction passe d'une valeur positive à une valeur négative; il y a donc une racine réelle dans cet intervalle, et il n'y en a qu'une, puisque la dérivée ne s'annule pas; de $\frac{3\pi}{2}$ à 2π, la tangente étant négative, la fonction reste positive. Si l'on continue à faire croître x, on trouvera de même une racine réelle à chaque tour de circonférence, dans le troisième quadrant, c'est-à-dire de $(2k+1)\pi$ à $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$. Ainsi l'équation admet une infinité de racines réelles.

Proposons-nous de calculer la plus petite racine positive; pour $x=\pi+\frac{\pi}{4}$, la tangente est égale à 1 et la fonction est encore positive; la racine est donc comprise entre $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{2}$, c'est-à-dire entre 3,9 et 5. Essayons le nombre intermédiaire 4,5. Posons $x=\pi+x'$; pour $x=4,5$, l'arc x' est égal à 1,3584 et vaut à peu près 77° 50′ en degrés anciens. On cherchera dans les tables le logarithme de la tangente, puis la valeur même de la tangente :

$$x=4{,}5,\quad x'=77°50',\quad \log\operatorname{tang} x'=0{,}6663537\,;$$
$$\operatorname{tang} x'=4{,}6384,\quad f(x)=-0{,}1384.$$

Le résultat étant négatif, le nombre 4,5 est trop grand. Essayons 4,4 :

$$x=4{,}4,\quad x'=72°6',\quad \log\operatorname{tang} x'=0{,}4908093,$$
$$\operatorname{tang} x'=3{,}0960,\quad f(x)=+1{,}3040.$$

Ainsi la racine est comprise entre 4,4 et 4,5 et très-rapprochée de ce dernier nombre.

L'interpolation par parties proportionnelles donne la correction 0,09. Nous essayerons donc 4,49 :

$$x=4{,}49,\quad x'=77°15'30'',\quad \operatorname{tang} x'=4{,}4223,\quad f(x)=+0{,}0677$$
$$x=4{,}50,\quad x'=77°49'50'',\quad \operatorname{tang} x'=4{,}6372,\quad f(x)=-0{,}1372$$

La racine est comprise entre 4,49 et 4,50. L'interpolation par parties proportionnelles donne $z=0{,}33$ par défaut; on essayera donc 4,4934.

$$x=4{,}4934,\quad x'=77°27'10''3,\quad \operatorname{tang} x'=4{,}493210,\quad f(x)=+0{,}000190$$
$$x=4{,}5935,\quad x'=77°27'30''9,\quad \operatorname{tang} x'=4{,}495332,\quad f(x)=-0{,}001832$$

La racine est comprise entre 4,4934 et 4,4935 et très-rapprochée du premier de ces nombres. L'interpolation donne $z = \frac{202}{2022} = 0,094$. On aura donc

$$x = 4,4934094.$$

244. Exemple V. Soit l'équation

$$e^x - e^{-x} = ax,$$

que l'on a à résoudre dans le problème de la chaînette, c'est-à-dire lorsqu'on cherche la forme d'équilibre d'une chaîne pesante. Prenons $a = 12,54$, on a

$$f(x) = e^x - e^{-x} - 12,54 \times x = 0,$$
$$f'(x) = e^x + e^{-x} + 12,54,$$
$$f''(x) = e^x - e^{-x}.$$

On calculera e^x et e^{-x} par les formules

$$\log e^x = Mx = 0,4342944482 \times x,$$
$$\log e^{-x} = -\log e^x.$$

L'équation est vérifiée pour $x = 0$; mais elle admet en outre une racine positive que nous nous proposons de déterminer. La valeur $x = 1$ donne évidemment un résultat négatif, et de même $x = 2$. Substituons les nombres suivants :

$$x = 3, \quad e^x = 20, \quad f(x) = -17,$$
$$x = 4, \quad e^x = 55, \quad f(x) = +\ 5.$$

La racine est comprise entre 3 et 4. L'interpolation donne $z = 0,8$. Essayons 3,8 :

$$x = 3,8, \quad e^x = 44,7012, \quad e^{-x} = 0,0224, \quad f(x) = -2,9732,$$
$$x = 3,9, \quad e^x = 49,1025, \quad e^{-x} = 0,0202, \quad f(x) = +0,4752.$$

La racine est comprise entre 3,8 et 3,9.

La méthode d'approximation de Newton donne

$$\alpha = -\frac{0,4762}{36,8872} = -0,01291\ldots\ldots$$

L'erreur commise est moindre que 0,00012; ainsi la valeur de α est comprise entre $-0,01291$ et $-0,01304$. On prendra $\alpha = -0,0130$ et l'on aura la racine $x = 3,8870$ par excès avec quatre décimales exactes.

245. Exemple VI. La détermination du mouvement d'une planète ou d'une comète autour du soleil se ramène à la résolution de l'équation

$$u - e\sin u = \zeta,$$

dans laquelle la lettre ζ désigne un angle donné, u un angle cherché, e l'excentricité de l'orbite divisée par $\sin 1''$.

Quand on obtient cette équation, ζ et u désignent des longueurs d'arcs, e l'excentricité; on la transforme en changeant les arcs en angles. Soit x le nombre qui mesure la longueur d'un arc, le rayon étant pris pour unité; on sait que, dans la construction des tables trigonométriques, la longueur de l'arc d'une seconde a été prise pour le sinus de l'angle d'une seconde; le quotient $x' = \frac{x}{\sin 1''}$ exprimera donc combien l'angle qui correspond à l'arc x contient de fois l'angle d'une seconde. Ainsi, pour transformer un arc en angle, l'angle de $1''$ étant pris pour unité, il suffit de le diviser par $\sin 1''$. Si donc on divise par $\sin 1''$ tous les termes de l'équation $u - e\sin u = \zeta$, on obtient l'équation $u' - \frac{e}{\sin 1''}\sin u' = \zeta'$. Quand il s'agit des planètes dont les orbites ont, en général, des excentricités très-petites, on peut résoudre l'équation par la méthode des ap-

proximations successives. Écrivons, en effet, l'équation sous la forme

$$u = \zeta + e \sin u.$$

En négligeant le second terme du second membre, on a une première valeur approchée $u_0 = \zeta$. Substituant cette valeur dans le second membre, on a une seconde valeur $u_1 = \zeta + e \sin \zeta$ plus rapprochée que la première. Substituant cette seconde valeur approchée dans le second membre, on a une troisième valeur encore plus approchée $u_2 = \zeta + e \sin u_1$, et ainsi de suite.

Prenons $\zeta = 63°28'54'',6$ et l'excentricité 0,01679226 de l'orbite terrestre. On cherche d'abord

$$\log e = \frac{\log 0{,}01679226}{\log \sin 1''} = 3{,}5395343,$$

qui servira dans tout le cours du calcul. Calculons par logarithmes la première correction $e \sin \zeta$:

$$\begin{aligned} \log e &= 3{,}5395343 \\ \log \sin \zeta &= \bar{1}{,}9478572 \\ \hline & 3{,}4873915 \end{aligned}$$

$$e \sin \zeta = 0°51'11'',8\,;\quad u_1 = 63°20'6'',4.$$

Calculons de même la seconde correction $e \sin u_1 - e \sin \zeta$:

$$\begin{aligned} \log e &= 3{,}5395343 \\ \log \sin u_1 &= \bar{1}{,}9511658 \\ \hline \log 0°51'35'',5 \ldots &= 3{,}4907001 \end{aligned}$$

$$e \sin u_1 - e \sin \zeta = 25'',6\,;\quad u_2 = 63°20'29'',9.$$

Calculons ensuite la troisième correction $e \sin u_2 - e \sin u_1$:

$$\begin{aligned} \log e &= 3{,}5395343 \\ \log \sin u_2 &= \bar{1}{,}9511906 \\ \hline \log 0°51'35'',5 \ldots &= 3{,}4907249 \end{aligned}$$

$$e \sin u_2 - e \sin u_1 = 0'',2\,;\quad u_2 = 63°20'30'',1.$$

On voit que les corrections deviennent de plus en plus petites; la correction suivante n'aurait pas d'influence sur les dixièmes de seconde. Le calcul se fait très-rapidement, parce qu'on se sert toujours de la même partie des tables.

Exercices.

1° Partager un hémisphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

2° Déterminer les dimensions d'un prisme droit à base carrée, connaissant la surface totale et le volume.

3° Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la somme des deux côtés de l'angle droit et le volume qu'engendre le triangle tournant autour de l'hypoténuse.

4° Partager un demi-cercle en deux parties équivalentes par une droite parallèle au diamètre.

5° On a trouvé, pour l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduite, la formule empirique

$$Q = 21{,}045\sqrt{D^5 j} - 0{,}0196D^2,$$

dans laquelle D représente le diamètre du tuyau en mètre, j la pente par mètre, Q la dépense par seconde en mètres cubes. Calculer le diamètre qu'il faut donner à un tuyau pour que sous une pente donnée il fournisse une quantité d'eau déterminée. — On emploiera la méthode des approximations successives à cause de la petitesse du second coefficient.

CHAPITRE VI.

DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES EN FRACTIONS SIMPLES.

246. On appelle *fraction rationnelle* une fraction algébrique dont les deux termes sont des polynômes entiers d'une même lettre x. Soit $\frac{F(x)}{f(x)}$ une fraction de cette forme. Nous pouvons toujours supposer cette fraction irréductible; car, si les deux polynômes avaient des facteurs binômes communs, on les supprimerait. Lorsque le numérateur est d'un degré plus élevé que le dénominateur, on effectue la division en ordonnant par rapport aux puissances décroissantes de x, ce qui donne un quotient entier et une fraction ayant son numérateur d'un degré moins élevé que le dénominateur. Laissant de côté cette partie entière, nous avons à considérer une fraction irréductible $\frac{F(x)}{f(x)}$ dont le numérateur est d'un degré moins élevé que le dénominateur. Nous désignerons par m le degré du dénominateur, le numérateur étant au plus du degré $m-1$.

Cas des racines inégales.

247. Supposons d'abord que l'équation $f(x)=0$ n'ait pas de racines égales. J'appelle $a, b, c, \ldots\ldots h, k$ les m racines de cette équation, et je pose

$$f(x)=(x-a)f_1(x).$$

Je remplace x par $a+(x-a)$, et, regardant $x-a$ comme

un accroissement, je développe les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$,

$$F(x)=F(a+\overline{x-a})=F(a)+F'(a)\frac{x-a}{1}+\ldots\ldots$$

$$f_1(x)=f_1(a+\overline{x-a})=f_1(a)+f'_1(a)\frac{x-a}{1}+\ldots\ldots$$

Je divise le premier polynôme par le second, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de $x-a$; le premier terme du quotient est $\frac{F(a)}{f_1(a)}$; j'appelle A ce premier terme; en multipliant le diviseur par A et retranchant le produit du dividende, on a un reste qui ne contient plus de terme constant; si l'on met $x-a$ en facteur commun, ce reste peut être représenté par $(x-a)F_1(x)$. Du dividende, qui est au plus du degré $m-1$, on retranche le produit $Af_1(x)$ qui est du degré $m-1$, et l'on met $x-a$ en facteur, le polynôme $F_1(x)$ est donc au plus du degré $m-2$. J'arrête la division à ce premier terme; le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste, on a

$$(1)\qquad F(x)=Af_1(x)+(x-a)F_1(x).$$

En divisant les deux membres par $f(x)$ ou par $(x-a)f_1(x)$, il vient

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Ainsi la fraction proposée est égale à une première fraction simple $\frac{A}{x-a}$, plus une fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$ de même forme que la première, mais d'un degré moins élevé. Le dénominateur $f_1(x)$ est en effet du degré $m-1$,

le numérateur $F_1(x)$ au plus du degré $m-2$. Cette nouvelle fraction est d'ailleurs irréductible comme la proposée; car si les deux termes avaient un facteur binôme commun, ce ne pourrait être que l'un des facteurs de $f_1(x)$, par exemple $x-b$; ce facteur, divisant les deux parties qui composent le second membre de l'équation (1), diviserait leur somme $F(x)$, ce qui est impossible, puisqu'on a supposé qu'aucun des facteurs de $f(x)$ ne divise $F(x)$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent à la fraction $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$. Si l'on pose $f_1(x)=(x-b)f_2(x)$, on aura

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)}=\frac{B}{x-b}+\frac{F_2(x)}{f_2(x)};$$

la nouvelle fraction $\frac{F_2(x)}{f_2(x)}$ est aussi irréductible, son dénominateur du degré $m-2$, son numérateur au plus du degré $m-3$.

De même

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)}=\frac{C}{x-c}+\frac{F_3(x)}{f_3(x)};$$

en continuant de cette manière, on arrivera enfin à une fraction du premier degré

$$\frac{F_{m-1}(x)}{f_{m-1}(x)}=\frac{K}{x-k}.$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, les fractions intermédiaires disparaissent, et l'on a

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\cdots\cdots+\frac{K}{x-k}.$$

Ainsi *la fraction rationnelle est décomposable en une*

somme de fractions simples, ayant respectivement pour dénominateurs les facteurs simples qui composent le dénominateur de la fraction proposée et pour numérateurs des constantes.

248. Je dis maintenant que la fraction proposée *n'est décomposable qu'en un seul système de fractions simples.* On démontre, en effet, que deux systèmes de fractions simples

$$\frac{A}{x-a}+\frac{A}{x-b}+\ldots\ldots+\frac{K}{x-k}.$$

$$\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\ldots\ldots+\frac{K'}{x-k'},$$

égaux pour toutes les valeurs de x, sont identiques. Multiplions par $x-a$, il vient

$$A+(x-a)\left[\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots\right]$$
$$=(x-a)\left[\frac{A'}{x-a'}+\frac{B'}{x-b'}+\ldots\ldots\right].$$

Donnons maintenant à x la valeur particulière a; le premier membre se réduit à A; si aucun des dénominateurs des fractions du second système n'était égal à $x-a$, le second membre s'évanouirait quand on fait $x=a$; il faut donc que l'un de ces dénominateurs soit égal à $x-a$. Supposons, par exemple, $a'=a$; alors on a

$$A+(x-a)\left[\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots\right]$$
$$=A'+(x-a)\left[\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots\ldots\right],$$

et si l'on fait $x=a$, on en déduit $A'=A$. Ainsi la fraction $\frac{A}{x-a}$ du premier système fait partie du second. Suppri-

mons ces deux fractions égales, il reste deux systèmes égaux

$$\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots\ldots=\frac{B'}{x-b'}+\frac{C'}{x-c'}+\ldots\ldots$$

On démontrerait de même que la fraction $\frac{B}{x-b}$ du premier appartient au second, et ainsi de suite. Alors les deux systèmes sont identiques.

249. Calcul des numérateurs. Nous avons trouvé

$$A=\frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Le premier numérateur A est la valeur de la fraction

$$\frac{F(x)}{\left(\frac{f(x)}{x-a}\right)}$$

quand on y fait $x=a$.

De même le second numérateur B est la valeur de la fraction

$$\frac{F(x)}{\left(\frac{f(x)}{x-b}\right)},$$

quand on y fait $x=b$, etc.

On peut aussi calculer ces constantes au moyen de la dérivée de la fonction $f(x)$. En effet, nous avons posé

$$f(x)=(x-a)f_1(x);$$

si l'on prend les dérivées des deux membres, il vient

$$f'(x)=f_1(x)+(x-a)f_1'(x),$$

et, en faisant $x = a$,

$$f'(a) = f_1(a).$$

On en déduit

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)}.$$

On aura de même

$$B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{F(c)}{f'(c)} \cdots\cdots$$

Ainsi les *numérateurs des fractions simples sont les diverses valeurs que prend la fraction* $\frac{F(x)}{f'(x)}$, *quand on y remplace successivement* x *par chacune des racines* a, b, ... k *de l'équation* $f(x) = 0$.

Exemples.

1° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x}.$$

En résolvant l'équation

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0,$$

on obtient les quatre racines simples 0, 1, —1, —2. Ainsi la fraction rationnelle se décomposera en quatre fractions simples de la forme

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x+2},$$

Pour calculer les numérateurs, nous nous servirons de la dérivée

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 2,$$

ce qui donne

$$A = \frac{F(0)}{f'(0)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$B = \frac{F(1)}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

$$C = \frac{F(-1)}{f'(-1)} = \frac{-3}{2}$$

$$D = \frac{F(-2)}{f'(-2)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}.$$

Nous avons donc

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x} = \frac{3}{x} + \frac{\frac{1}{6}}{x - 1} - \frac{\frac{3}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{3}}{x + 2}.$$

2° Soit à décomposer la fraction

$$\frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)}.$$

La fraction proposée se décomposera de la manière suivante :

$$\frac{x^2 + 1}{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3}.$$

On peut déterminer les constantes immédiatement et sans l'aide d'aucune formule par la méthode des *coefficients indéterminés*. Si l'on multiplie par le dénominateur, l'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = {} & A(x - 1)(x - 2)(x - 3) + B(x + 1)(x - 2)(x - 3) \\ & + C(x + 1)(x - 1)(x - 3) + D(x + 1)(x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu, quelle que soit la valeur de x. Faisons x successivement égal à chacune des racines simples -1, 1, 2, 3, tous les termes du second membre s'éva-

nouissent, excepté un, et l'on a les relations

$$2 = -24A, \quad 2 = 4B, \quad 5 = -3C, \quad 10 = 8D;$$

d'où l'on déduit les valeurs constantes

$$A = -\frac{1}{12}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{5}{3}, \quad D = \frac{5}{4}.$$

Cas des racines égales.

250. Supposons que a soit une racine de l'équation $f(x)=0$ d'un ordre n de multiplicité. Nous poserons

$$f(x) = (x-a)^n f_1(x),$$

et après avoir développé comme précédemment les deux polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ suivant les puissances croissantes de $x-a$,

$$F(x) = F(a+x-a) = F(a) + F'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots\ldots,$$

$$f_1(x) = f_1(a+x-a) = f_1(a) + f_1'(a)\frac{x-a}{1} + \ldots\ldots,$$

nous effectuerons la division du premier par le second, ordonnant le quotient suivant les puissances croissantes de $x-a$ et poussant l'opération jusqu'au terme du degré $n-1$; représentons ce quotient par

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots\ldots + A_{n-1}(x-a)^{n-1},$$

le reste de la division contenant à tous ses termes le facteur $(x-a)^n$ peut être mis sous la forme $(x-a)^n F_1(x)$. On a ainsi

$$F(x) = [A_0 + A_1(x-a) \ldots\ldots + A_{n-1}(x-a)^{n-1}]f_1(x) + (x-a)^n F_1(x).$$

Le diviseur étant du degré $m-n$, et le quotient du degré

$n-1$, le produit du diviseur par le quotient est du degré $m-1$, et comme le dividende est au plus du degré $m-1$, la différence ou le reste de la division sera au plus du degré $m-1$; puisqu'on a mis $(x-a)^n$ en facteur, il en résulte que le polynôme $F_1(x)$ est au plus du degré $m-n-1$. Il est évident, d'ailleurs, que les deux polynômes $f_1(x)$ et $F_1(x)$ sont premiers entre eux; car s'ils avaient un facteur commun, ce facteur diviserait $f(x)$ et $F(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Divisons maintenant par $f(x)$ ou $(x-a)^n f_1(x)$ les deux membres de l'égalité précédente, il vient

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} \cdots\cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{F_1(x)}{f_1(x)}.$$

Ainsi le facteur multiple $(x-a)^n$ donne lieu à une série de n fractions simples, et nous avons encore à décomposer la fraction irréductible $\frac{F_1(x)}{f_1(x)}$, dont le dénominateur est du degré $m-n$, le numérateur au plus du degré $m-n-1$.

Supposons que l'équation $f(x)=0$ contienne une seconde racine b d'un degré p de multiplicité; nous poserons $f_1(x)=(x-b)^p f_2(x)$, et nous aurons de même

$$\frac{F_1(x)}{f_1(x)} = \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \cdots\cdots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{F_2(x)}{f_2(x)}.$$

S'il y a une troisième racine c d'ordre q, on aura encore

$$\frac{F_2(x)}{f_2(x)} = \frac{C_0}{(x-c)^q} + \frac{C_1}{(x-c)^{q-1}} + \cdots\cdots + \frac{C_{q-1}}{x-c} + \frac{F_3(x)}{f_3(x)}.$$

S'il n'y a pas d'autre racine multiple, le polynôme $f_3(x)$ ne contenant plus que des facteurs simples, on aura, d'après ce qui a été dit plus haut,

$$\frac{F_3(x)}{f_3(x)} = \frac{D}{x-d} + \frac{E}{x-e} + \dots\dots + \frac{K}{x-k}.$$

En ajoutant toutes ces égalités, on trouve enfin

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \dots\dots + \frac{A_{n-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \dots\dots + \frac{B_{p-1}}{x-b}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{D}{x-d} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \frac{K}{x-k}.$$

A chaque racine multiple correspond un groupe de fractions simples. La première fraction de chaque groupe existe nécessairement, mais les autres peuvent manquer; en effet, quand on effectue la division des polynômes $F(x)$ et $f_1(x)$ ordonnés comme nous l'avons dit, les premiers termes $F(a)$ et $f_1(a)$ ne sont pas nuls, et par conséquent le premier terme $A_0 = \frac{F(a)}{f_1(a)}$ du quotient n'est ni nul ni infini; mais parmi les termes suivants, quelques-uns peuvent avoir des coefficients nuls.

251. Je dis maintenant que *la fraction proposée n'est décomposable qu'en un seul système de fractions simples.* Soient

$$\frac{A_0}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} \dots\dots + \frac{B_0}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} \dots\dots,$$
$$\frac{A'_0}{(x-a')^{n'}} + \frac{A'_1}{(x-a')^{n'-1}} \dots\dots + \frac{B'_0}{(x-b')^{p'}} + \frac{B'_1}{(x-b')^{p'-1}} \dots\dots,$$

deux systèmes égaux entre eux, quelle que soit la valeur de x. Multiplions les deux expressions par $(x-a)^n$ et faisons $x=a$; la première se réduit à A_0; si aucune des frac-

tions du second système n'avait pour dénominateur une puissance de $x-a$, le second membre s'évanouirait quand on fait $x=a$; il faut donc que certaines fractions du second système aient pour dénominateurs des puissances de $x-a$. Soit $a'=a$; je dis que $n'=n$; car si les deux exposants différaient, si, par exemple, n était plus grand que n', en multipliant par $(x-a)^n$, on verrait que pour $x=a$ le premier membre se réduirait à A_0, tandis que le second s'évanouirait ; on a donc aussi $n'=n$. Mais alors l'égalité devient, après la multiplication par $(x-a)^n$,

$$A_0+A_1(x-a)+\ldots\ldots+(x-a)^n\left[\frac{B_0}{(x-b)^p}+\ldots\ldots\right]$$
$$=A'_0+A'_1(x-a)+\ldots\ldots+(x-a)^n\left[\frac{B'_0}{(x-b')^{p'}}+\ldots\ldots\right];$$

si l'on fait $x=a$, on en déduit $A_0=A'_0$. Ainsi la première fraction du premier système se retrouve dans le second. En supprimant ces deux fractions égales et recommençant le même raisonnement, on verrait que la seconde s'y trouve également, et ainsi de suite. Donc les deux systèmes sont identiques.

Exemple.

Soit à décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3}.$$

Le dénominateur

$$f(x)=x^3(x-1)^2(x+1)$$

contenant un facteur triple, un facteur double et un facteur simple, la fraction proposée se développera en fractions

simples de la forme suivante

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_0}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Calculons les trois constantes qui se rapportent au facteur triple x. Nous ordonnons par rapport aux puissances croissantes de x,

$$F(x) = 2 - 5x + 4x^3,$$
$$f_1(x) = (x-1)^2(x+1) = 1 - x - x^2 + x^3,$$

et nous effectuons la division jusqu'à ce que nous arrivions au terme du second degré, en remarquant que dans ce calcul il est inutile d'écrire les termes d'un degré supérieur au second, ce qui abrége l'opération,

$$\begin{array}{r|l} 2 - 5x & 1 - x - x^2 \\ \hline -3x + 2x^2 & 2 - 3x - x^2. \\ -x^2 & \end{array}$$

Puisque le quotient a été représenté par $A_0 + A_1 x + A_2 x^2$, on a

$$A_0 = 2, \quad A_1 = -3, \quad A_2 = -1.$$

Calculons maintenant les coefficients qui se rapportent au facteur double $x-1$. On peut supposer que l'on commence la décomposition par ce facteur. Nous développerons jusqu'au premier degré en négligeant les termes suivants

$$F(x) = F(1 + x - 1) = F(1) + F'(1)(x-1) + \ldots = 1 + 7(x-1) + \ldots$$
$$f_1(x) = x^3(x+1) = x^4 + x^3 = f_1(1) + f_1'(1)(x-1) + \ldots = 2 + 7(x-1) + \ldots$$

et nous effectuerons la division

$$\begin{array}{r|l} 1 + 7(x-1) & 2 + 7(x-1) \\ \hline + \frac{7}{2}(x-1) & \frac{1}{2} + \frac{7}{4}(x-1). \end{array}$$

Ce quotient a été représenté par $B_0 + B_1(x - 1)$; on a donc

$$B_0 = \frac{1}{2}, \qquad B_1 = \frac{7}{4}.$$

Quant au coefficient C qui se rapporte au facteur simple $(x+1)$, on l'obtient par la règle ordinaire

$$C = \frac{F(-1)}{f'(-1)} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}.$$

On a ainsi

$$\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3} = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{7}{4}}{x-1} - \frac{\frac{3}{4}}{x+1}.$$

On peut employer aussi la méthode des coefficients indéterminés. On a posé

$$\frac{4x^3-5x+2}{x^6-x^5-x^4+x^3} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_0}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, cette égalité devient

$$\begin{aligned} 4x^3 - 5x + 2 = {} & (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)(x-1)^2(x+1) \\ & + [B_0 + B_1(x-1)]x^3(x+1) + Cx^3(x-1)^2. \end{aligned}$$

En donnant successivement à x les valeurs $0, 1, -1$, on a

$$2 = A_0, \qquad 1 = 2B_0, \qquad 3 = -4C;$$

d'où

$$A_0 = 2, \qquad B_0 = \frac{1}{2}, \qquad C = -\frac{3}{4}.$$

Prenons les dérivées des deux membres de l'égalité précé-

dente, ce qui donne

$$12x^2-5=(A_1+2A_2x)(x-1)^2(x+1)+(A_0+A_1x+A_2x^2)[2(x-1)(x+1)+(x-1)^2]$$
$$+B_1x^3(x+1)+[B_0+B_1(x-1)][3x^2(x+1)+x^3]$$
$$+3Cx^2(x-1)^2+2Cx^3(x-1),$$

et dans cette dernière égalité, faisons $x=0$ et $x=1$, nous aurons

$$-5=A_1-A_0, \qquad 7=2B_1+7B_0,$$

d'où

$$A_1=-3, \qquad B_1=\frac{7}{4}.$$

Il ne reste plus que la constante A_2 à déterminer; pour cela nous prendrons encore une fois la dérivée et nous y ferons $x=0$. Il suffit d'écrire les termes qui ne contiennent pas le facteur x,

$$24x=2A_2(x-1)^2(x+1)+2A_1[2(x-1)(x+1)+(x-1)^2]$$
$$+A_0[2(x+1)+4(x-1)]+\ldots\ldots$$

Si l'on fait $x=0$, il vient

$$0=2A_2-2A_1-2A_0,$$

d'où

$$A_2=-1.$$

Cas des racines imaginaires.

252. La décomposition de la fraction rationnelle $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ est vraie d'une manière générale, quelles que soient les racines de l'équation $f(x)=0$, réelles ou imaginaires. Supposons que les deux polynômes qui composent la fraction proposée aient tous leurs coefficients réels; dans ce cas, si l'équation admet une racine imaginaire $\alpha+\beta i$, elle admet-

tra la racine conjuguée $\alpha-\beta i$. A ces deux racines correspondent dans le développement des fractions simples de la forme

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}, \quad \frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i};$$

les numérateurs de ces deux fractions sont des quantités imaginaires conjuguées; car la seconde se déduit évidemment de la première par le changement du signe de i. Si l'on veut éviter les imaginaires dans la décomposition, il suffit d'ajouter ces deux fractions simples, ce qui donne

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}+\frac{A-Bi}{x-\alpha+\beta i}=\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Ainsi, à un couple de racines simples imaginaires conjuguées correspond une fraction réelle de la forme

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

ayant son dénominateur du second degré et son numérateur du premier degré.

253. Nous avons supposé dans ce qui précède que les racines imaginaires conjuguées sont simples; supposons maintenant qu'elles soient d'un degré n de multiplicité, et, pour abréger, représentons par x^2+px+q le produit $(x-\alpha)^2+\beta^2$ des deux facteurs binômes du premier degré. Nous allons démontrer que la partie qui, dans le développement, correspond à ces deux racines imaginaires conjuguées d'ordre n, peut être ramenée à une somme de n fractions de la forme

$$\frac{M_0x+N_0}{(x^2+px+q)^n}+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}\cdots\cdots+\frac{M_{n-1}x+N_{n-1}}{x^2+px+q},$$

dont les numérateurs sont réels et du premier degré.

Posons $f(x) = (x^2 + px + q)^n f_1(x)$. On peut disposer des deux constantes M_0 et N_0 de manière que le polynôme

$$(2) \qquad F(x) - (M_0 x + N_0) f_1(x)$$

soit divisible par $x^2 + px + q$. Il suffit pour cela que ce polynôme s'annule pour $x = \alpha + \beta i$ et pour $x = \alpha - \beta i$; si nous remplaçons x par chacune de ces deux valeurs et si nous appelons $A \pm Bi$ et $C \pm Di$ les valeurs correspondantes des fonctions $F(x)$ et $f_1(x)$, nous obtiendrons les deux relations

$$(A + Bi) - [M_0(\alpha + \beta i) + N_0](C + Di) = 0,$$
$$(A - Bi) - [M_0(\alpha - \beta i) + N_0](C - Di) = 0.$$

On en déduit, en égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire,

$$(\beta D - \alpha C) M_0 - C N_0 = -A,$$
$$(\beta C + \alpha D) M_0 + D N_0 = B.$$

Ces équations entre M_0 et N_0 sont du premier degré; le dénominateur commun des inconnues $\beta(C^2 + D^2)$ n'est pas nul; car si β était nulle, les racines ne seraient pas imaginaires; si $C^2 + D^2$ était nulle, le polynôme $f_1(x)$ contiendrait encore le facteur $x^2 + px + q$. On trouve ainsi pour M_0 et N_0 des valeurs réelles finies et déterminées.

Le polynôme (2) devenant de cette manière divisible par $x^2 + px + q$, si l'on appelle $\varphi(x)$ le quotient entier, on aura

$$F(x) - (M_0 x + N_0) f_1(x) = (x^2 + px + q)\varphi(x),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M_0 x + N_0}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\varphi(x)}{(x^2 + px + q)^{n-1} f_1(x)}.$$

On aurait de même

$$\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-1}f_1(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\frac{\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{n-2}f_1(x)},$$

et ainsi de suite

Exemples.

1° Décomposer la fraction

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{x^3+5}{x^4+x^3+x^2+x}=\frac{x^3+5}{x(x+1)(x^2+1)}.$$

On a deux racines réelles o et —1 et deux racines imaginaires $+i$ et $-i$. Si l'on ne veut pas de quantités imaginaires dans le développement, on écrira

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Pour calculer les numérateurs, on emploiera de préférence dans ce cas la méthode des coefficients indéterminés. Si l'on multiplie par $f(x)$, l'égalité précédente devient

$$x^3+5=A(x+1)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x+1).$$

Si l'on y fait successivement $x=0$ et $x=-1$, on trouve

$$A=5, \qquad B=-2.$$

Il reste à déterminer les deux constantes C et D qui correspondent aux racines imaginaires. On égalera les coefficients de x^3 et de x^2 dans les deux membres de l'égalité, ce qui donne les relations

$$1=A+B+C;$$
$$0=A+C+D;$$

d'où l'on déduit

$$C = -2, \qquad D = -3.$$

Ainsi

$$\frac{x^3+5}{x^4+x^3+x^2+x} = \frac{5}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2x+3}{x^2+1}.$$

2° Décomposer la fraction

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}.$$

On a une racine simple 0 et deux racines imaginaires conjuguées doubles $\pm i$. La fraction se décomposera donc sous la forme suivante

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{B'x+C'}{x^2+1}.$$

Si l'on chasse les dénominateurs, on a l'égalité

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (B'x+C')x(x^2+1).$$

Faisant $x=0$, il vient $A=1$. Égalant ensuite dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les relations

$$A+B'=0, \quad C'=0, \quad 2A+B+B'=0, \quad C+C'=0;$$

d'où l'on déduit

$$B'=-1, \quad C'=0, \quad B=-1, \quad C=0.$$

On a ainsi

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}.$$

NOTE A. — *Formule générale pour la résolution des équations du premier degré.*

254. Soient n lettres $a, b, c, \ldots\ldots h$. Considérons l'expression

$$abc\ldots\ldots h \times (b-a) \times (c-a)(c-b) \times (d-a)(d-b)(d-c) \times \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \times (h-a)(h-b)\ldots\ldots(h-g).$$

On a mis d'abord le produit des n quantités, et, pour former les facteurs binômes, on a écrit à la suite de chaque lettre successivement chacune des lettres précédentes. Le nombre des facteurs binômes est égal au nombre des combinaisons des n lettres deux à deux, c'est-à-dire à $\frac{n(n-1)}{2}$; le facteur $abc\ldots\ldots h$ étant du degré n, le degré de chacun des termes du produit est $\frac{n(n-1)}{2} + n$, ou $\frac{n(n+1)}{2}$. Le polynôme ainsi formé jouit de propriétés remarquables que nous allons démontrer.

Nous remarquons d'abord que, si l'on permute deux lettres quelconques dans le polynôme, on reproduit le même polynôme avec des signes contraires. Permutons par exemple les deux lettres b et d; le facteur $abc\ldots\ldots h$ ne change pas; les facteurs binômes qui ne contiennent aucune des deux lettres b et d ne changent pas non plus; les facteurs qui ne contiennent qu'une seule de ces lettres donnent des groupes tels que

$$(b-a)(d-a), \quad (c-b)(d-c), \quad (f-b)(f-d),$$

qui ne changent pas par la permutation des lettres b et d; il reste à considérer le facteur $d-b$ qui renferme les deux lettres; ce facteur devient $b-d$ ou $-d+b$, et change de

signe ; il en résulte que l'on obtiendra les différents termes du second polynôme en changeant simplement les signes de tous les termes du premier polynôme. Mais, on obtient aussi ce second polynôme en permutant les deux lettres b et d dans le premier ; ainsi, quand on permute deux lettres quelconques dans le polynôme proposé, on reproduit le même polynôme avec des signes contraires ; par conséquent, quand on permute deux lettres quelconques dans le polynôme proposé, et qu'on change les signes de tous les termes, on reproduit le polynôme proposé.

On conclut de là, que si, dans un terme du polynôme on permute deux lettres et qu'on change le signe, on obtiendra un autre terme du polynôme. Supposons qu'un terme contienne deux lettres affectées du même exposant, la permutation de ces deux lettres ne changeant pas la valeur du terme, on voit qu'à ce terme en correspond un autre égal et de signe contraire ; si l'on supprime les termes qui se détruisent deux à deux, le polynôme ne contiendra plus que des termes dans lesquels tous les exposants seront différents. Une même lettre n'entrant que dans $n-1$ facteurs binômes, les exposants dont les lettres sont affectées dans les différents termes du produit seront au plus égaux à n ; comme la somme des exposants dans chaque terme, ou le degré du terme, doit être égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, on en conclut que chaque terme doit contenir toutes les lettres affectées des exposants $1, 2, 3, \ldots, n$. Imaginons que, dans chaque terme du produit, on dispose les lettres suivant l'ordre des exposants ; le nombre des termes du produit, après la suppression des termes qui se détruisent deux à deux, sera égal évidemment au nombre des arrangements, ou des permutations, que l'on peut former avec les n lettres (n° 27). Le

premier terme, celui que l'on obtient quand on prend les premiers termes dans tous les facteurs binômes, est

$$a^1 b^2 c^3 \ldots\ldots h^n.$$

De celui-là on pourra déduire tous les autres en permutant deux lettres plusieurs fois successivement et changeant le signe à chaque permutation.

Si deux lettres, telles que a et b, deviennent égales entre elles, le facteur $b-a$ se réduisant à zéro, il est clair que le produit est nul. Mais il faut remarquer en outre que les termes du produit se détruisent deux à deux ; soit, par exemple, le terme $\pm a^1 d^2 b^3 c^4 \ldots\ldots$; Si dans ce terme on permute les deux lettres a et b, et qu'on change le signe, on obtient un autre terme $\mp b^1 d^2 a^3 c^4 \ldots$ du produit ; or, quand on fait $a=b$, ces deux termes, devenant égaux et de signes contraires, se détruisent.

255. Dans le polynôme précédent, que nous avons défini par un produit de facteurs binômes, concevons que l'on remplace les exposants par des indices, il est évident que les mêmes propriétés subsisteront. Le premier terme de ce nouveau polynôme sera

$$a_1 b_2 c_3 \ldots\ldots h_n.$$

Si l'on permute deux lettres quelconques, et qu'on change les signes, on reproduira le même polynôme. On pourra donc du premier terme déduire tous les termes en permutant deux lettres plusieurs fois successivement et changeant le signe à chaque permutation. Si deux lettres deviennent égales, les termes se détruiront encore deux à deux, et le polynôme deviendra égal à zéro.

Le polynôme que nous venons de former s'appelle le *déterminant* relatif au système des quantités contenues dans le tableau suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots\ldots & h_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, & \ldots\ldots & h_2, \\ a_3, & b_3, & c_3, & \ldots\ldots & h_3, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n, & b_n, & c_n, & \ldots\ldots & h_n. \end{vmatrix}$$

Chaque terme du déterminant contient comme facteur un nombre de chacune des lignes horizontales et un seul, et de même un nombre de chacune des colonnes verticales.

Il a été démontré que, lorsqu'on remplace les nombres d'une colonne verticale par ceux d'une autre colonne verticale, le déterminant est identiquement nul. De même, quand on remplace les nombres d'une ligne horizontale par ceux d'une autre ligne horizontale, le déterminant est identiquement nul; considérons, par exemple, le terme $\pm a_1 d_2 b_3 c_4 \ldots\ldots$; la permutation des deux indices 1 et 3 dans ce terme, revenant à la permutation des deux lettres a et b, donne un terme de signe contraire $\mp a_3 d_2 b_1 c_4 \ldots\ldots$; quand deux indices deviennent égaux, les termes deviennent donc égaux et de signes contraires, et le polynôme s'annule.

256. Un système de n équations du premier degré à n inconnues peut être mis sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots\ldots + h_1 v = k_1, \\ a_2 x + b_2 y + \ldots\ldots + h_2 v = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + \ldots\ldots + h_n v = k_n. \end{array}$$

Imaginons formé le déterminant relatif au système des coefficients des inconnues dans ces équations, et représentons par D ce polynôme. Tous les termes contenant la lettre a une fois et seulement une fois, nous pourrons ordonner ce polynôme par rapport à a_1, a_2, ... a_n :

$$D = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots\ldots + A_n a_n,$$

les quantités A_1, A_2, ... ne contenant plus la lettre a. Nous savons que, si l'on remplace la lettre a par l'une des autres lettres, le polynôme devient nul; on a donc les relations

$$\begin{aligned} &A_1 b_1 + A_2 b_2 + \ldots\ldots + A_n b_n = 0, \\ &A_1 c_1 + A_2 c_2 + \ldots\ldots + A_n c_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots\ldots + A_n h_n = 0. \end{aligned}$$

Cela posé, multiplions les équations proposées, la première par A_1, la seconde par A_2, la troisième par A_3, ..., la dernière par A_n et ajoutons, le coefficient de x sera le polynôme D; les coefficients des autres inconnues, d'après les relations précédentes, seront nuls; on aura donc

$$Dx = A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots\ldots + A_n k_n,$$

d'où

$$x = \frac{A_1 k_1 + A_2 k_2 + \ldots\ldots + A_n k_n}{A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots\ldots + A_n a_n}.$$

Le déterminant est le dénominateur commun. On obtient le numérateur relatif à chaque inconnue en remplaçant dans le dénominateur les coefficients de l'inconnue par les seconds membres des équations.

NOTE B. — *Théorème sur le nombre des racines d'une équation algébrique.*

257. Nous avons expliqué (n° 141) comment on représente les quantités imaginaires par des grandeurs géométriques. Dans un plan, marquons un point fixe o et traçons une droite ou axe fixe ox; une quantité imaginaire $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sera représentée par une longueur om égale au module r,

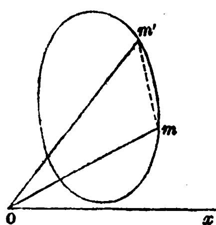


Fig. 1.

et portée dans une direction qui fasse avec l'axe ox un angle égal à l'argument θ. Si l'on conçoit que le point m décrive dans le plan une courbe continue, cette courbe figurera la variation continue de la quantité imaginaire z. La grandeur géométrique om' étant la somme des deux grandeurs géométriques om et mm', on dira que la corde mm' est la variation de z quand on passe du point m au point m'.

Nous savons (nº 140) que le module d'une quantité imaginaire est parfaitement déterminé, mais que l'argument peut être augmenté ou diminué d'un multiple quelconque de 2π. Lorsque la variable z décrit une courbe, le module varie d'une manière continue; nous ferons varier aussi l'argument d'une manière continue; ainsi, du point m au point voisin m', la variation de l'argument sera l'angle très-petit mom'. Quand la variable revient au point de départ m après avoir décrit une courbe fermée, le module reprend sa valeur primitive; mais l'argument peut avoir

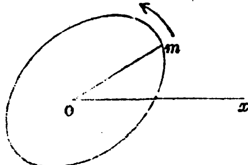


Fig. 2.

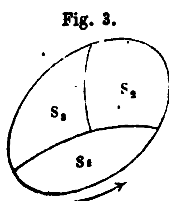
été augmenté ou diminué de 2π, ou d'un multiple de 2π. Si la courbe fermée ne comprend pas l'origine o (*fig.* 1), il est évident que l'argument reprend en m sa valeur primitive; mais si la courbe enveloppe l'origine, comme le représente la figure 2, le rayon om ayant fait un tour entier, l'argument a été augmenté de 2π.

Il est clair que, lorsque la variable parcourt une même ligne dans deux sens opposés, les variations de l'argument sont égales et de signes contraires. Par exemple, si la variable décrit l'arc mm' (*fig.* 1) dans un sens, puis le même

arc $m'm$ en sens inverse, les variations de l'argument sont égales à l'angle mom', pris d'une part avec le signe $+$, d'autre part avec le signe $-$.

Si l'on partage une aire plane s en plusieurs parties s_1, s_2, s_3 (*fig.* 3) par des transversales rectilignes ou curvilignes, la variation de l'argument relative au contour de l'aire s est égale à la somme des variations de l'argument relatives aux contours des aires partielles s_1, s_2, s_3. Car chaque transversale étant parcourue dans deux sens opposés, les variations fournies par ces transversales se détruisent deux à deux, et il ne reste que la variation produite par le contour de l'aire s. On suppose que les contours de toutes les aires s_1, s_2, s_3 sont parcourus par le mobile dans le même sens.

Fig. 3.



258. Ces principes nous serviront à étudier les propriétés d'une fonction entière, quand on donne à la variable z des valeurs imaginaires. Considérons d'abord un polynôme entier ne renfermant pas de terme constant

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots\ldots$$

Appelons $a, b, c, \ldots\ldots$, les modules des coefficients, r le module de la variable z; le module d'une somme de quantités imaginaires étant moindre que la somme des modules de ces quantités (n° 143), le module du polynôme est plus petit que

$$ar + br^2 + cr^3 + \ldots\ldots$$

Mais on peut donner à la variable réelle r une valeur assez petite r_1, pour que ce dernier polynôme ait une valeur plus petite qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit; pour toutes les valeurs de z ayant un module infé-

rieur à r_1, le polynôme proposé aura un module plus petit que α.

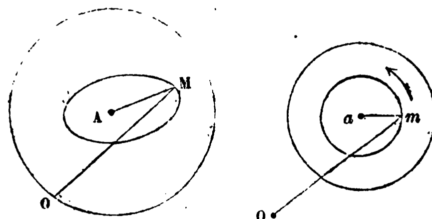
Considérons maintenant une fonction entière quelconque $u = f(z)$. Si l'on donne à la variable z un accroissement h, la fonction éprouve un accroissement

$$k = hf'(z) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(z) + \ldots\ldots$$

On peut rendre le module de h assez petit pour que le module de k soit plus petit que toute quantité donnée; ainsi, à une variation infiniment petite de la variable correspond une variation infiniment petite de la fonction; on en conclut que la fonction entière varie d'une manière continue avec la variable.

259. La fonction u est une nouvelle quantité imaginaire que nous représenterons par une grandeur géométrique comme la variable z. Afin d'éviter la confusion, nous figurerons ces deux variables sur deux plans différents. Soit o

Fig. 4.



(*fig.* 4) l'origine de la grandeur géométrique om qui, sur le premier plan, représente la variable z, O l'origine de la grandeur géométrique OM qui, sur le second plan, représente la fonction u. A chaque valeur de z correspond une valeur de u et une seule; ainsi, à chaque point m du premier plan correspond un point déterminé M du second

plan. Quand le point m décrit une courbe continue, le point M décrit aussi une courbe continue. Si le point m revient à sa position primitive, après avoir décrit une courbe fermée, le point M revient aussi à sa position primitive.

Donnons à z une valeur particulière z_0 figurée par la longueur oa; à cette valeur correspond une valeur u_0 de la fonction figurée par la longueur OA. Nous supposons la valeur u_0 différente de zéro. Faisons $z = z_0 + h$, $u = u_0 + k$. On peut, comme nous l'avons dit, assigner un module r_1 tel que pour toutes les valeurs de h dont le module est égal ou inférieur à r_1, le module de k soit moindre que la longueur OA, c'est-à-dire moindre que le module de u_0. Les nouvelles variables h et k sont figurées par les droites am et AM qui tournent autour des points fixes a et A. Si le point m décrit une courbe fermée comprise dans le cercle décrit du point a comme centre avec un rayon égal à r_1, le point M décrira aussi une courbe fermée comprise dans le cercle décrit du point A comme centre avec un rayon égal à AO. En suivant le mouvement de la droite OM qui représente la fonction u, on voit que l'argument de cette fonction reprend en M sa valeur primitive.

260. Supposons maintenant que la quantité z_0 soit racine du polynôme de l'ordre n de multiplicité, c'est-à-dire que le polynôme $f(z)$ soit divisible par $(z - z_0)^n$. Posons

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

ou

$$u = h^n \varphi(z_0 + h).$$

Nous pouvons assigner un module r_1 tel que, pour toutes les valeurs de h dont le module est égal ou inférieur à r_1, le module de $\varphi(z_0 + h) - \varphi(z_0)$ soit moindre que le module

de $\varphi(z_0)$. Faisons

$$h = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

d'où

$$h^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

La fonction u étant égale au produit des deux facteurs h^n et $\varphi(z_0 + h)$, son argument est la somme des arguments de ces deux facteurs.

Concevons que le point m décrive autour du point a une courbe fermée comprise dans le cercle r_1, et, pour plus de précision, faisons décrire à ce point une circonférence de cercle ayant le point a pour centre et un rayon r plus petit que r_1; la droite am, qui représente la variable h, décrivant autour du point a le cercle entier, l'argument θ de cette variable augmente de 2π, et par conséquent l'argument $n\theta$ de h^n augmente de $2n\pi$. Il résulte d'ailleurs de ce qui précède que l'argument de $\varphi(z_0 + h)$ reprend sa valeur primitive. On conclut de là que l'argument de la fonction u éprouve une augmentation égale à $2n\pi$.

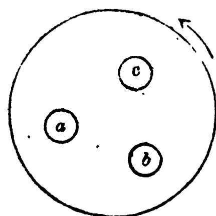
261. Quand la variable z décrit une même ligne dans deux sens opposés, la fonction u décrit aussi une même ligne dans deux sens opposés; car, si la variable z va de m en m', puis rétrograde de m' en m, la fonction u va de M en M', puis rétrograde de M' en M pour revenir à sa valeur primitive; l'argument de la fonction u éprouve donc deux variations égales et de signes contraires.

Concevons que la variable z décrive le contour d'une aire plane quelconque s (*fig.* 3); partageons cette aire en plusieurs parties $s_1, s_2, s_3, \ldots$, par des transversales rectilignes ou curvilignes, et concevons que la variable décrive le contour de chacune de ces aires partielles dans le même sens. Quand la variable z décrit le contour d'une aire plane, la fonction u décrit aussi une courbe fermée, et son

argument éprouve une certaine variation. Chacune des transversales étant parcourue par la variable z dans deux sens opposés, les variations correspondantes de l'argument de la fonction sont égales et de signes contraires. On en conclut que la variation de l'argument de la fonction relative au contour de l'aire s est égale à la somme des variations relatives aux aires partielles $s_1, s_2, s_3, \ldots$..

262. Supposons d'abord que l'aire considérée ne comprenne aucune racine du polynôme $f(z)$. On peut la diviser en parties assez petites pour que l'on puisse appliquer à chacune d'elles les conclusions du n° 259. La variation relative à chaque partie étant nulle, la variation relative à l'aire totale est nulle.

Supposons maintenant que l'aire plane s comprenne une ou plusieurs racines du polynôme; par exemple une racine $z = a$ du degré n de multiplicité, une racine $z = b$ du degré n', etc. Marquons à l'intérieur de l'aire les points a, b, c, ..., qui correspondent à ces racines. Autour de ces points comme centres, décrivons des cercles très-petits. La partie de l'aire s extérieure à ces cercles ne comprenant pas de racine, la variation correspondante de l'argument de la fonction est nulle; il reste à considérer les cercles eux-mêmes. La variation relative au cercle a, d'après ce que nous avons dit au n° 260, est $2n\pi$; la variation relative au cercle b est $2n'\pi$, etc. La variation relative à l'aire s est la somme de ces variations partielles, c'est-à-dire



$$2(n + n' + n'' + \ldots\ldots)\pi.$$

On en conclut le théorème suivant dû à l'illustre Cauchy:

Le nombre des racines d'un polynôme entier comprises dans une aire plane donnée est égal à la variation qu'éprouve l'argument du polynôme quand la variable décrit le contour de l'aire, cette variation étant divisée par 2π.

Il est clair que l'on compte chaque racine avec son degré de multiplicité.

263. De l'origine o comme centre, décrivons un cercle avec un rayon r assez grand pour que ce cercle comprenne toutes les racines du polynôme $f(z)$. La variation qu'éprouvera l'argument du polynôme quand la variable z décrira la circonférence de ce cercle donnera le nombre total des racines du polynôme. Soit m le degré du polynôme que nous ordonnons par rapport aux puissances décroissantes de z

$$u = Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + \ldots ;$$

nous pouvons écrire ce polynôme sous la forme

$$u = z^m\left(A + B\frac{1}{z} + C\frac{1}{z^2} + \ldots\right)$$

ou

$$u = z^m(A + Bz' + Cz'^2 + \ldots) = z^m\varphi(z'),$$

en posant $z = \dfrac{1}{z'}$.

Quand on fait décrire à la variable z le cercle de rayon r, la nouvelle variable z' décrit un cercle de rayon $\dfrac{1}{r}$; à la partie du plan extérieure au premier cercle correspond la partie du plan intérieure au second cercle. Puisque le polynôme $f(z)$ n'a aucune racine en dehors du premier cercle, le polynôme $\varphi(z')$ n'a aucune de ses racines à l'intérieur du second cercle. L'argument du polynôme $\varphi(z')$ reprend donc sa valeur primitive; ainsi l'argument du po-

lynôme $f(z)$ éprouve la même variation que l'argument de z^m. Si l'on pose

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

on a

$$z^m = r^m(\cos m\theta + i\sin m\theta);$$

on voit que, lorsque la variable z décrit la circonférence de rayon r, l'angle θ augmentant de 2π, l'argument $m\theta$ de z^m augmente de $2m\pi$; telle est la variation de l'argument du polynôme proposé. On en conclut que *tout polynôme entier du degré* m *a* m *racines réelles ou imaginaires*. C'est le théorème fondamental de la théorie des équations.

Note C. — *Théorème de Sturm.*

264. Le théorème de Sturm donne le moyen de trouver exactement le nombre des racines réelles d'une équation algébrique comprises entre deux nombres donnés.

Désignons par X un polynôme entier $f(x)$ à coefficients réels, n'ayant pas de racines égales, et ordonné suivant les puissances décroissantes de x. Appelons X_1 sa dérivée $f'(x)$. Divisons X par X_1 et appelons X_2 le reste changé de signe; divisons X_1 par X_2 et appelons X_3 le reste changé de signe; après un certain nombre d'opérations, nous arriverons à un reste indépendant de x; nous désignerons par X_r ce reste changé de signe. Considérons la suite des polynômes

$$X,\ X_1,\ X_2,\ \ldots\ldots,\ X_r.$$

Si dans cette suite on donne à x successivement deux valeurs réelles particulières x_0 et x_1, x_0 étant inférieure à x_1, et que l'on compte les variations que présentent les deux suites de quantités, le nombre des variations perdues quand

on passe de x_0 à x_1 indique exactement le nombre des racines réelles comprises dans cet intervalle.

En effet, faisons croître x d'une manière continue de x_0 et x_1; une modification dans le nombre des variations ne pourra s'opérer que si l'un des polynômes change de signe, et par conséquent passe par zéro. Nous remarquons d'abord que deux polynômes consécutifs X_n et X_{n-1} ne peuvent s'annuler pour une même valeur de x; car alors tous les polynômes seraient divisibles par $x-a$; le polynôme proposé et sa dérivée admettraient un commun diviseur, ce qui est contraire à l'hypothèse. Supposons que l'un des polynômes intermédiaires X_n change de signe pour $x=a$; comme on a, quelle que soit x,

$$X_{n-1} = X_n Q_n - X_{n+1},$$

on aura, pour $x=a$,

$$X_{n-1} = -X_{n+1}.$$

On peut prendre h assez petit pour que, x variant de $a-h$ à $a+h$, chacun des polynômes X_{n-1} et X_{n+1} conserve le même signe; ces deux polynômes auront donc des signes contraires dans tout cet intervalle. Or, quels que soient les signes du polynôme X_n pour $x=a-h$ et pour $x=a+h$, la suite des trois polynômes

$$X_{n-1},\ X_n,\ X_{n+1}$$

présentera évidemment, pour chacune de ces deux valeurs de x, une variation et une seule; seulement cette variation se sera déplacée d'un côté ou de l'autre. Ainsi, le nombre des variations que présente la suite des polynômes n'est pas modifié quand l'un des polynômes intermédiaires change de signe. D'ailleurs la dernière quantité X_r, qui est indépendante de x, conserve toujours le même signe. Le

nombre des variations de la suite ne changera donc que si le premier polynôme X, c'est-à-dire le polynôme proposé, change de signe.

Supposons que x passe par une racine a du polynôme proposé; on a

$$f(a-h) = -hf'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) - \ldots\ldots$$
$$f(a+h) = \quad hf'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \ldots\ldots$$

On peut rendre h assez petit pour que la dérivée $f'(x)$ conserve le même signe quand x varie de $a-h$ à $a+h$, et pour que le second membre de chacune des égalités précédentes ait le signe de son premier terme. Il en résulte que les deux polynômes $f(x)$ et $f'(x)$ ont des signes contraires pour $x=a-h$, et le même signe pour $x=a+h$. Il y a donc une variation perdue en tête de la suite des polynômes, quand x passe par une racine du polynôme proposé. Il en sera de même chaque fois que x passera par une des racines du polynôme. Ainsi le nombre des variations perdues dans la suite des polynômes quand on passe de la valeur x_0 à la valeur plus grande x_1 est égal au nombre des racines réelles comprises dans cet intervalle.

Nous avons supposé que le polynôme proposé n'a pas de racines simples; s'il avait des racines égales, la suite des opérations conduirait à un plus grand commun diviseur algébrique X_p, et l'équation proposée pourrait être remplacée par plusieurs équations de degrés moindres, comme nous l'avons expliqué au n° 182.

En appliquant cette méthode à l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$, on a la suite

$$X = x^3 + px + q,$$
$$X_1 = 3x^2 + p,$$
$$X_2 = -\frac{2p}{3}x - q,$$
$$X_3 = -\frac{4p^2}{4p^3 + 27q^2}.$$

L'équation aura ses trois racines réelles si la suite présente trois variations pour $x = -\infty$, et n'en présente plus aucune pour $x = +\infty$; ceci exige que l'on ait $p < 0$ et $4p^3 + 27q^2 < 0$, et l'on retrouve ainsi la condition que nous avons déjà obtenue par une autre méthode (n° 194).

NOTE D. — *Sur les fonctions symétriques.*

265. On dit qu'une expression renfermant plusieurs lettres est *symétrique* par rapport à ces lettres, lorsqu'elle ne change pas quand on permute deux lettres quelconques. Par exemple les fonctions

$$a^2 + b^2 + c^2,$$
$$ab + ac + bc,$$

sont des fonctions symétriques des trois lettres a, b, c. Nous ne nous occuperons que des fonctions symétriques entières.

Il est clair que, si dans un terme d'une fonction symétrique on permute deux lettres quelconques, on reproduit soit le même terme, soit un autre terme. La fonction symétrique peut se partager en groupes contenant chacun les termes qui se déduisent les uns des autres par la permutation des lettres. Pour abréger, nous n'écrirons qu'un terme de chaque groupe, et nous indiquerons par le signe Σ la somme de tous les termes de même espèce; on a,

par exemple,

$$(a+b+c+\ldots\ldots)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab.$$

Considérons une fonction symétrique entière de m lettres $a, b, c, \ldots, l$. Désignons par S_1 la somme de ces lettres, par S_2 la somme des produits de ces lettres deux à deux, par S_3 la somme des produits trois à trois, etc.; enfin par S_m le produit des m lettres; en d'autres termes, posons

$$S_1 = \Sigma a,\ S_2 = \Sigma ab,\ S_3 = \Sigma abc, \ldots\ldots, S_m = abc, \ldots\ldots l;$$

toute fonction entière symétrique des m lettres peut s'exprimer rationnellement au moyen des m fonctions symétriques particulières que nous venons de définir. Nous empruntons à l'Algèbre de M. Bertrand la démonstration de ce théorème important; ordonnons la fonction proposée T par ordre *alphabétique* de la manière suivante : Plaçons d'abord les termes qui contiennent la lettre a avec le plus fort exposant α; parmi ceux-là, ceux qui contiennent la lettre b avec le plus fort exposant β; parmi ces derniers, ceux qui contiennent la lettre c avec le plus fort exposant γ, et ainsi de suite; le premier terme du polynôme aura la forme $Aa^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$, la lettre A désignant un coefficient numérique positif ou négatif, l'exposant β étant égal ou inférieur à α, l'exposant γ égal ou inférieur à β, etc. On peut supposer que chaque terme contienne toutes les lettres, en affectant de l'exposant zéro les lettres qui manquent. Cela posé, formons le produit

$$A(S_1)^{\alpha-\beta} \times (S_2)^{\beta-\gamma} \times (S_3)^{\gamma-\delta} \times \ldots\ldots \times (S_m)^\lambda = P;$$

ce produit est une fonction symétrique homogène des m lettres; le premier terme de $(S_1)^{\alpha-\beta}$ est $a^{\alpha-\beta}$, le premier terme de $(S_2)^{\beta-\gamma}$ est $a^{\beta-\gamma} b^{\beta-\gamma}$, le premier terme de $(S_3)^{\gamma-\delta}$

est $a^{\gamma-\delta}b^{\gamma-\delta}c^{\gamma-\delta}$; enfin, le facteur $(S_m)^\lambda$ est $a^\lambda b^\lambda c^\lambda \ldots l^\lambda$; le premier terme du produit P est égal au produit des premiers termes des différents facteurs, c'est-à-dire à

$$Aa^{\alpha-\beta}\times a^{\beta-\gamma}b^{\beta-\gamma}\times a^{\gamma-\delta}b^{\gamma-\delta}c^{\gamma-\delta}\times \ldots\ldots \times a^\lambda b^\lambda c^\lambda \ldots\ldots l^\lambda,$$

ou plus simplement $Aa^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots l^\lambda$; c'est le premier terme de la fonction T. La différence $T-P=T_1$, qui est une nouvelle fonction symétrique homogène des m lettres du même degré, ne renferme plus ce premier terme, et le premier terme de T_1 vient après le premier terme de T dans l'ordre alphabétique.

On raisonnera ensuite sur la fonction T_1 comme sur la fonction proposée; à l'aide des fonctions S_1, S_2, ..., on formera un produit P_1 dont le premier terme soit le même que celui de T_1; la différence $T_1 - P_1 = T_2$ sera une nouvelle fonction symétrique homogène ne renfermant plus ce terme, et ainsi de suite. Il est clair qu'après un certain nombre d'opérations, on arrivera à une différence nulle. On a ainsi

$$T-P=T_1,\ T_1-P_1=T_2,\ \ldots\ldots,\ T_\mu - P_\mu = 0;$$

d'où l'on déduit

$$T = P + P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_\mu.$$

La fonction symétrique proposée T est exprimée rationnellement au moyen des fonctions S_1, S_2, ... S_m.

Considérons, par exemple, la fonction Σa^2. Le premier terme étant a^2, on prendra

$$P = S_1^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab;\ \text{d'où}\ \Sigma a^2 = S_1^2 - 2S_2.$$

Soit encore la fonction Σa^3; le premier terme étant a^3, on prendra

$$P = S_1^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6\Sigma abc,$$
$$T_1 = T - P = -3\Sigma a^2 b - 6\Sigma abc.$$

Le premier terme de T_1 étant $-3a^2b$, on prendra

$$P_1 = -3S_1S_2 = -3(\Sigma a^2 b + 3\Sigma abc),$$
$$T_1 - P_1 = 3\Sigma abc = 3S_3.$$

on en conclut

$$T = P + P_1 + 3S_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3.$$

Si les m quantités $a, b, c, \ldots, l$ sont les racines d'une équation algébrique du degré m,

$$x^m - S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} - \ldots \pm S_m = 0,$$

toute fonction entière symétrique de ces quantités s'exprimera rationnellement au moyen des coefficients de l'équation.

Note E. — *Sur l'élimination.*

266. On doit à M. Sylvester une méthode très-élégante pour effectuer l'élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques à l'aide d'un déterminant. Supposons qu'il s'agisse d'éliminer l'inconnue y entre deux équations à deux inconnues x et y. Considérons d'abord le cas simple où les deux équations sont du second degré par rapport à y; soient

$$(1) \qquad \begin{cases} Ay^2 + By + C = 0, \\ A'y^2 + B'y + C' = 0, \end{cases}$$

les deux équations, dans lesquelles les lettres A, B, C, A', B', C' désignent des fonctions de x. Si l'on remplace y par

$\frac{y}{z}$, les équations prendront la forme homogène

$$(2)\qquad \begin{cases} Ay^2+Byz+Cz^2=0,\\ A'y^2+B'yz+C'z^2=0. \end{cases}$$

En multipliant chacune de ces deux équations par y et par z, on obtient le système des quatre équations

$$(3)\qquad \begin{cases} Ay^3+By^2z+Cyz^2 \\ A'y^3+B'y^2z+C'yz^2 \\ \qquad Ay^2z+Byz^2+Cz^3=0, \\ \qquad A'y^2z+B'yz^2+C'z^3=0. \end{cases}$$

Si les équations (1) sont vérifiées par un système de valeurs attribuées à x et à y, les équations (2) seront vérifiées par la même valeur de x, y et z ayant des valeurs indéterminées; les équations (3), que l'on peut considérer comme un système de quatre équations du premier degré entre les quatre inconnues y^3, y^2z, yz^2, z^3 seront aussi vérifiées par une infinité de valeurs attribuées à ces inconnues; on en conclut que la valeur de x doit annuler le déterminant relatif à ces équations. Si donc on égale à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} A, & B, & C, & 0 \\ A', & B', & C', & 0 \\ 0, & A, & B, & C \\ 0, & A', & B', & C' \end{vmatrix}$$

on aura l'équation à laquelle doit satisfaire l'inconnue x.

En général, soit m le degré de la première équation et n le degré de la seconde, par rapport à y; en remplaçant y par $\frac{y}{z}$, on mettra les deux équations sous la forme

$$(4)\qquad A_0y^m+A_1zy^{m-1}+A_2z^2y^{m-2}+\ldots\ldots+A_mz^m=0,$$

$$(5)\qquad A'_0y^n+A'_1zy^{n-1}+A'_2z^2y^{n-2}+\ldots\ldots+A'_nz^n=0.$$

Si l'on multiplie ensuite la première équation par y^{n-1}, zy^{n-2}, $z^2y^{n-3}, \dots, z^{n-1}$, et la seconde par $y^{m-1}, zy^{m-2}, z^2y^{m-3}, \dots, z^{m-1}$, on formera un système de $n+m$ équations du premier degré entre les $m+n$ inconnues

$$y^{m+n-1},\quad zy^{m+n-2},\quad z^2y^{m+n-3},\quad \dots,\quad z^{m+n-1}.$$

En égalant à zéro le déterminant relatif à ce système d'équations du premier degré, on obtiendra l'équation à laquelle doit satisfaire l'inconnue x.

267. On peut à l'aide des fonctions symétriques trouver le degré de l'équation résultante. Supposons que l'équation (4) que nous désignons par $\varphi(y) = 0$, soit du degré m par rapport aux deux inconnues x et y, et l'équation (5) du degré n; les lettres A_0 et A'_0 désignent des constantes que nous réduirons à l'unité, les lettres A_1 et A'_1 des polynômes du premier degré en x, les lettres A_2 et A'_2 des polynômes du second degré, etc.; en général l'exposant de x indique le degré de chaque coefficient. Concevons que l'on attribue à x une valeur convenable; appelons y_0, y_1, $y_2, \dots\dots y_{m-1}$ les m racines de l'équation (4), et de même y'_0, y'_1, $y'_2, \dots\dots y'_{n-1}$ les n racines de l'équation (5); pour que les deux équations soient vérifiées simultanément, il faudra que l'une des n racines de la seconde équation vérifie la première, c'est-à-dire que l'une des n quantités

$$\varphi(y'_0),\quad \varphi(y'_1),\quad \varphi(y'_2),\quad \dots\dots\quad \varphi(y'_{n-1})$$

soit nulle; cette condition sera remplie si le produit

$$(6)\qquad P = \varphi(y'_0) \times \varphi(y'_1) \times \varphi(y'_2) \dots\dots \times \varphi(y'_{n-1})$$

est nul. Ce produit est une expression rationnelle par rapport aux coefficients de la première équation; comme c'est

une fonction symétrique entière des racines de la seconde équation, on pourra aussi l'exprimer rationnellement au moyen des coefficients de cette seconde équation, ainsi que nous l'avons expliqué dans la note précédente; en égalant à zéro l'expression rationnelle ainsi obtenue, on aura l'équation à laquelle doit satisfaire l'inconnue x.

Si l'on met $\varphi(y)$ sous la forme

$$\varphi(y) = (y - y_0)(y - y_1) \ldots\ldots (y - y_{m-1}),$$

on voit que le produit

$$P = (y'_0 - y_0)(y'_0 - y_1) \cdots (y'_0 - y_{m-1}) \times (y'_1 - y_0)(y'_1 - y_1) \cdots$$

est composé de mn facteurs binômes. Concevons maintenant que, dans les deux équations proposées, on remplace z par zt, c'est comme si l'on multipliait par t toutes les racines des deux équations; les mn facteurs binômes qui composent P seront multipliés par t, et par conséquent le produit lui-même sera multiplié par t^{mn}; on en conclut que les différents termes du polynôme P, tel qu'on les déduit de la forme (6) par les fonctions symétriques, contiendront le facteur z^{mn}; chacun des coefficients des équations (4) et (5) étant par rapport à x d'un degré égal à l'exposant de z, il en résulte que le polynôme P est du degré mn par rapport à x. Ainsi le degré de l'équation résultante est égal au produit des degrés des deux équations proposées.

FIN.

Paris.—Imprimé par E. Thunot et Cie, 26, rue Racine.

